हिन्दी

# माध्यमिक त्रिकोणमिति

(Intermediate Trigonometry)



लेखक

श्री. यशवन्त विनायक ठोसर, एम्. एस्सी.

अनुवादक

श्री. रमेशचन्द्र वर्मा, एम्. एस्सी.

गणित सम्पादक

प्रा. नीलकण्ठ आबाजी शास्त्री, एम्. एस्सी. (लंदन)

# FOREWORD

Convinced of the educational and national value of the use of Indian Languages in Indian Universities, the Academic Council of Nagpur University, on 12th September, 1946, resolved that Hindi and Marathi shall be the media of instruction in the University for the Intermediate courses in Arts and Science from the academic year 1949 50 and for the courses for the B A and B Sc, from the academic year 1951 52 And from the same dates English shall cease to be the medium of instruction in the University.

While co operating whole-heartedly in the prolonged All-India deliberations for the long-range planning for introduction of Indian languages as media of instruction, Nagpur University has—except as regards postponement of the scheme in respect of the science courses for one year—stuck to its schedule, endeavouring, with all its limitations, to surmount the imme-

diate practical difficulties in carrying through a linguistic transition of this magnitude

2 These difficulties are, in the main, the three T's of Terms, Text books and Teachers

Thanks to the timely initiative and generous support of its Government, it was possible for the State of Madhya Pradesh to obtain the services of Dr Raghu Vira of the International Academy of Indian Culture of Lahore and to entrust him with the formidable but foundational task of coining and adapting the technical terms of science for the needs of the new linguistic media. Dr Raghu Vira, who had already devoted a considerable part of his life to a scientific approach to the problem of technical terms has proceeded to his task on the basic principle of *allied words for allied ideas*, derived from the Sanskrit roots He has reduced the problem of coining terms almost to an art, an art as fine as it is useful

3 These terms have been coined and adapted in close collaboration with a band of experienced and enthusiastic teachers of science deputed by the State Government at the same time to prepare suitable text-books of science

under the general direction and guidance of Dr. Raghu Vira.

They have so far prepard fourteen text-books each with a Hindi and a Marathi version dealing with the Intermediate Science courses in Algebra, Trigonometry, Solid Geometry, Co-ordinate Geometry, Statics, Dynamics, Physics (Theory), Practical Physics, General and Inorganic Chemistry, Organic Chemistry, Practical Chemistry, Zoology, Botany (Theory) and Botany (Practical).

The manuscripts of these text-books, when received from the Government, were referred by the University to its Boards of Studies in the various subjects and, on receipt of their reports, the Academic Council decided, on 8th December, 1949, that, subject to certain specified changes, they be recommended as suitable for the Intermediate Science courses of the University.

4. Finally, in accordance with a suggestion of the State Government and with the help of an appropriate Government grant, the University decided in April, 1950, to undertake the publication of these first text-books prepared for its courses in science. Their printing is now

in progress and seven of these—both Hindi and Marathi versions—which are required for use in the first year of the Intermediate courses are being published today

5 In the special position occupied by the Universities of the Madhya Pradesh, it has been necessary to publish these books both in Hindi and Marathi This has added to the labour and the cost involved At the same time it has given us a unique advantage we have here an opportunity of piloting an educational experiment in a regional language and at the same time in the language of the Union The inter action of the two parallel series of lectures and text books in the same University—and in many cases, in the same college—will, I am confident, prove valuable for the emergence of both Hindi and Marathi as more perfect media of higher education than they can claim to be at present

6 As regards the change of medium for the Intermediate Arts courses, this has already been brought into force from the academic year 1949-50 The proposal for preparation and publication of text books specially designed for

the needs of the University is still under the consideration of the authorities. It was, however, thought desirable not to postpone the operation of the scheme in respect of the Arts courses as (i) the number of technical terms required for Arts is much smaller, as compared with those required for Science; and (ii) a certain number of text-books of the Intermediate Arts standard are already available, both for Hindi and Marathi. For certain subjects, glossaries of technical terms which will serve the preliminary needs of the teachers and the students have also been prepared by the University Boards of Studies. It is further hoped that it would soon be possible to adopt a scheme for preparation of text-books for Arts subjects also.

7. At the transitional stage, the problem of teachers adequately qualified to give instruction through the Indian languages presents another hurdle. For reasons, both historical and geographical, the colleges of Madhya Pradesh have been fortunate in having on their staff teachers who, between themselves, can claim almost all the principal spoken languages of India as their mother-tongues. At the present stage,

however, this creates an immediate difficulty in re organizing the teaching arrangements on the new basis The University is, however, confident that, where necessary, the teachers will avail themselves of the existing opportunities of acquiring a fairly good knowledge of the language of the Union or a language of their region and that the teachers and the management will, between themselves, so arrange the teaching programmes of colleges that the transition to the new media is made both smooth and effective

No formal test for imparting instruction through the new media has accordingly been prescribed by the University

8 The final shape of the cultural media of the new India will, after all, be moulded by that intellectual commerce between the teacher and the taught which we call University education The scheme of Nagpur University leaves the choice as between the Sanskritic technical terms and their equivalents to the teachers and the students themselves The text books being published under the scheme give the new Sanskritic technical terms as well as their English equi-

valents and both teachers and students are, at the present stage, permitted to use either of them according to their convenience and requirements. Adoption of this course cuts across the prevailing controversy with regard to the structure of technical terms and, at the same time, gives the newly-coined terms an opportunity to be judged on their own merits along with their English competitors in the academic field.

9. Progress in education requires both individual experiments and general planning, local initiative as well as central direction. It would hardly be proper to be dogmatic about their order of priority and, in the case of a great linguistic transition at the University stage, the problem requires to be attacked on all fronts. The Conference of Education Ministers and Vice-Chancellors of India convened by the Ministry of Education in New Delhi in January, 1948, had recommended five years as the time-limit within which Indian Universities should make the requisite preparations for commencing their instruction through the Indian languages. The Indian Universities Commission has, however, wisely left the determination of the duration

of the preparatory period to the interplay of the various educational and social factors that operate in Universities Adoption of such a course would leave each University freedom to regulate the pace of its linguistic progress according to its own needs, resources and limitations

10 Change in the medium of instruction at different dates in different Universities no doubt gives rise to fresh problems Each of these has, however, to be tackled by an intelligent and sympathetic administrative approach One of these difficulties evidently relates to the migration of students from one University to another —a process which, I hope will in the national interests, receive every encouragement in the future The difficulty in this respect, however would not seem to be so formidable as it might appear at first sight, if we remember that (i) English text-books in each subject will be recommended along with the Hindi and Marathi text books for use of students, (ii) students and teachers will, for the present be familiar both with the Hindi or Marathi terms and with their English equivalents, and (iii) English will continue to be a compulsory subject both for

the Intermediate and for the first degree courses in Arts and Science.

The same considerations would seem to apply to the apparent difficulties in respect of All-India Competitive Examinations. With the goodwill and determination shown by the builders of the new constitution of India, there is good reason for hoping that English may soon cease to be the sole medium for the All-India Competitive Examinations. The institution of the language of the Union as the medium of instruction and examination in the Indian Universities should itself accelerate the pace of progress towards this transition.

11. I venture to hope that this series of books will prove useful not only for the State of Madhya Pradesh, but also for other States in their efforts to adopt a regional language or the language of the Indian Union as the media of instruction at the University level. The present effort is necessarily imperfect. We can write good book in Hindi and Marathi only if we can do original thinking in Hindi and Marathi, as we do in English today. Yet we can hope to do our thinking in Indian languages only when we have

some written material to stimulate and sustain our thinking in these languages It is a vicious circle that has to be broken and the present series of books is an organised attempt to break it Deeper thought, practical experience, national planning and local variations will, I have no doubt, change the shape of much of what is written in these text books If however, they serve even as a raw material on which these forces can play to mould them according to our varying requirements, the labour of those who have worked during the last four years for making this new academic venture a success will have been amply rewarded

The J N Tata University Convocation Hall, Nagpur
15th August 1950

*K L Dubey*
Vice Chancellor,
Nagpur University

# INTRODUCTION*

The writing of the Intermediate Trigonometry was begun in April, 1947 by Shri Y V Thosar, M Sc, Lecturer in Mathematics, College of Science, Nagpur who was deputed to work with me by the Government of Madhya Pradesh. Shri Thosar consulted a number of books by Indian and English authors and wrote his first draft in English Shri B K Paradkar helped him in the collection of questions set at Indian University examinations The problems were solved by the author himself and answers were appended to the book Shri N A Shastri, Asstt. Professor of Mathematics, Mahakoshal Mahavidyalaya, Jabalpur, revised the English draft and made useful suggestions for improvement The next step was the preparation of a complete list of trigonometrical terms including phrases and symbols for which Hindi and Marathi equivalents were needed These were made available to Shri Thosar by me, Shri N. A Shastri and Shri V. N Dabadghao (Asstt Professor of Physics,

*In writing the introduction in English I have followed the wishes of Lt Col Shri K L Dubey, the Vice-Chancellor of the Nagpur University It is hereby intended to introduce the book to such teachers as know neither Hindi nor Marathi

Vidarbha Mahavidyalaya, Amraoti) working in collaboration Some work in this direction had already been done by myself and Dr Braj Mohan of the Hindu University Banaras Shri Thosar wrote out the Marathi text on the basis of the material that he had collected in English It was next translated into Hindi by Shri R C Verma, M Sc now lecturer in Mathematics, Mahakoshal Mahavidyalaya Jabalpur Shri V K Mathur, M A helped Shri R C Verma in finalising the Hindi version The two versions were carefully compared by Shri Shastri Shri Thosar and Shri R C Verma Finally the book was submitted to the Board of Studies in Mathematics of the Nagpur University which recommended the book for the Intermediate examination

* * *

Sanskrit possesses a rich mathematical literature, which is replete with technical terms We have made free use of these ancient terms though very often we had to restrict the use of one term to one specific meaning only The requirements of modern trigonometry are however, not satisfied in their entirety by ancient terms Hence new terms had often to be evolved They are designed to be short, compact and significant For a clear understanding of the terms used in the present book I am giving hereunder short word notes which, I hope would be found useful by teachers and students alike

त्रिकोण मिति is a Sanskrit facsimile of the European word tri gono metry *Tri* is Sanskrit त्रि कोण for Greek *gonia* is the commonest Indian word for angle त्रिकोण already occurs in the Mahabharata कोणस्पृग्वृत्त of भास्कराचार्य

has been translated by Colebrooke as a 'circle in contact with the angles, an exterior circle, one circumscribed *Metry* is मिति 'measurement', from Sanskrit root मा to measure

अंश 'numerator' and 'degree is an ancient word. Grade has to be distinguished from degree It is $\frac{1}{100}$th part of a right angle and thus smaller than a degree which is $\frac{1}{90}$ th part of a right angle It has been translated by अंशक, smaller than an अंश, the suffix क denoting diminution.

अक्ष has been used in Indian astronomy for 'terrestrial latitude' We have used the specific word अक्षवृत्त (cf विषुवद्वृत्त equator, देशान्तरवृत्त longitude) In our terminology अक्ष has been retained for 'axis'

अधिकोण is an obtuse angle (अधि stands for अधिक i e an angle greater than a right angle Cf न्यूनकोण acute angle)

अनुपात 'proportion' is an ancient word and is in wide use in Hindi, Bengali Marathi and other languages अनुपाती is proportional

अनुच्छेद 'article' is already in use in Bengali It has also been used in the Hindi version of the Indian Constitution Etymologically अनु small + छेद section

अनुरेखण 'trace' i e, 'to copy by following (अनु) the lines (रेखा), is a denominative verb अनुरेखित traced

अपवर्त्य is used for multiple in Hindi and Bengali. अपवर्तक is an ancient word in the sense of a common measure.

अपवर्तन is reduction of a fraction to its lowest term.

अयुग्म 'odd' and युग्म 'even' are ancient words used as early as the गृह्यसूत्रs.

अर्हा 'value' is from √अर्ह् to deserve, to merit, to be worthy of.

अल्पिष्ठ least. Cf भूयिष्ठ maximum Both are ancient words.

आदेश substitute It is well known to students of Sanskrit, e g पाणिनि—स्थानिवदादेशोऽनल्विधौ.

आयत 'rectangle' is an ancient word and is also in common use in Hindi, Bengali and other Indian languages.

आयाम 'length' is an ancient word.

अर is the spoke of a wheel, hence a radius. From अर is derived आर radian, i e. a central angle subtended in a circle by an arc whose length is equal to the radius of the circle Radian, when used as an adjective, would be आरीय.

आवर्तकाल, आवर्त period आ+√वृत् 'to turn round'.

ज्या is the parent of 'sine'. ज्या 'sine of an arc' has been used in the सूर्यसिद्धान्त 11.57. कोटिज्या 'cosine' is also from the सूर्यसिद्धान्त. There it signifies the cosine of an angle in a right-angled triangle.

उत्क्रमकोटिज्या coversed sine. उत्क्रम is versed or reversed, कोटिज्या cosine

उच्छ्राय and उच्चता have been specifically used for altitude and height respectively. Both are ancient words.

ऊर्ध्व is an ancient word, 'point upwards,' hence 'vertical'.

उपसाध्य corollary, साध्य proposition A corollary is a proposition requiring no additional proof following upon one just demonstrated

उपसादन to bring near, उपसन्न brought near, approximate उभयसाधारण common to both

धन positive and ऋण negative धन in the sense of an affirmative quantity or plus and ऋण in that of a negative quantity or minus are ancient words

एकक unit ('a single thing, as a magnitude or number regarded as an undivided whole) It is used in this sense in Bengali (see Guha's Modern Anglo Bengali Dictionary)

ऐकात्म्य identity, from एकात्म identical

कर्ण 'hypotenuse of a triangle is an ancient word

कला 'minute' occurs in सूर्यसिद्धान्त and other works

काष्ठिका a second has been derived from काष्ठा which is $\frac{1}{30}$th of a कला (see Manu I 64) काष्ठिका is smaller than a काष्ठा

विकला stands for the second of a degree in सूर्यसिद्धान्त

स्पर्शज्या (abbreviated to स्पज्या) is tangent when it is the portion (of the straight line tangent to a curve) between the point of tangency and a given line In the sense of a tangent line or curve it is स्पर्शरेखा or simply स्पर्शी

क्रोशक mile In ancient literature the common क्रोश is of the length of 4000 हस्तs i e 6000 feet, a हस्त being $1\frac{1}{2}$ feet A mile (5280 feet) is shorter than a क्रोश (क is added to क्रोश to signify diminution)

क्षितिज 'horizon', occurs in आर्यभट and सूर्यसिद्धांत It is also widely used in Hindi, Bengali Marathi, etc क्षैतिज is horizontal

क्षेत्रफल area The word is used in the गोलाध्याय and कात्यायन श्रौतसूत्र as meaning the superficial contents of a figure It is current in Hindi Bengali etc फल is also used by आर्यभट for area of a figure Thus स्फुटफल occurs for distinct or precise area (of a triangle, etc )

घात 'power is widely used in Hindi It is an ancient word It is from √हन् to multiply

चरण quadrant It is an ancient word and signifies a fourth part

चाप arc' is from सूर्यसिद्धान्त

छेदा logarithm According to नेमिचन्द्र the Jain author of त्रिलोकसार if $x=2^n$ then $n$ is called the अर्धच्छेद of $x$ छेद is the number of times a particular number can be divided by a base If $64=4^3$ then 3 represents the number of times that 64 can be divided by 4 Literally छेद is cutting and the number of times that the division can take place is छेदसंख्या or simply छेदा In $64=4^3$, 3 is the log of 64 to the base 4 दशाच्छेदा common logarithm, दशाच्छेदापद्धति common system of logarithms i e logarithms having 10 for their base Its complete translation would be दशाधारछेदा For brevity दशाच्छेदा has been used instead

द्विसमत्रिभुज isosceles triangle Latin *isosceles* is from Greek *isoskeles* *isos* equal + *skelos* leg In geometry it is a triangle having two equal sides It is a significant but unintelligible word द्विसमत्रिभुज is in comparison

simplicity itself It is a त्रिभुज three sided figure, द्वि two of the sides being सम equal

द्विघात समीकार quadratic equation Quadratic is an adjective from quadrate 'square'. In a quadratic equation समीकार the highest power घात of the unknown quantity is a square द्वि

दशमिक decimal दशमलव is widely used in Hindi for decimal Here is visible an attempt to have a phonetic approximation to the English word But लव meaning a part is not required after दशम, as दशम itself means the tenth part Decimal is derived from L *decimus*, 'tenth' from *decem* 'ten' + *al*, of which the exact Indian equivalent will be दशमिक (दशम tenth + इक) In Bengali दश-मिक is already current (see Guha's Modern Anglo Bengali Dictionary)

दशमिकांश mantissa This word is believed to be of Etruscan origin The Indian word is crystal clear while the English word is perfectly opaque In Latin it meant an addition, make weight. It has gone out of use in general English where it meant an addition of little value In mathematics it denotes the decimal दशमिक part अंश of a common logarithm

ध्रुव pole ध्रुव in the सूर्यसिद्धान्त signifies a celestial pole It is widely used in all important Indian languages

ध्रुववृत्त meridian Meridian is a great circle वृत्त on the surface of the earth, passing through the poles ध्रुव and any given place ध्रुववृत्त is short for ध्रुवान्तगामी वृत्त

निर्मेय problem A problem is a proposition requiring an operation to be performed or a construction निर्माण to be made Literally निर्मेय is that which is to be

constructed Cf. प्रमेय theorem

निष्पत्ति 'ratio is used not only in Hindi but in Bengali and elsewhere (e g, see the Modern Anglo Bengali Dictionary by Charuchandra Guha).

न्यास for data is widely used in our astronomical literature Etymologically it is that which has been put down नि+अस् to serve as a basis for mathematical investigation. Literally data or its singular datum would be दत्त 'given'

न्यूनकोण acute angle It is less than a right angle Cf अधिकोण obtuse angle

परि circum परि as a prefix implies round, around, about. Circum is used adverbially to signify around, about, on all sides Cf. परिकेन्द्र circumcenter, परित्रिज्या circumradius, परिलेखन circumscribe, परिवृत्त circumcircle

परिमाप perimeter, the whole outer boundary or measure माप of a body or figure

पाद foot पद and पाद both mean foot. The English word is historically a descendant of the Sanskrit word. As a measure पाद has been used in the शतपथब्राह्मण, in the श्रौतसूत्रs and elsewhere Like all other measures in ancient times it must have varied slightly from place to place There are two measurements given for पाद, one is 12 अंगुलs and the other is 15 अंगुलs (कात्यायनश्रौतसूत्र). The second measurement is approximately 11¼". In modern times the foot is a fixed measurement of 12 inches. It was used extensively for measuring land. On the European Continent, the foot, now largely replaced by metric units, varies locally between 11 and 14 inches It is interesting to note that as in India the पाद was subdivided

into 12 angulas so in the English system also the foot is subdivided into 12 parts, the inches Only an inch is slightly bigger than an अगुल (and hence our word प्रागुल for inch) An inch was originally divided into three parts called barley corns, whose length was declared by a statute apparently of 17 Edw II given in the Cottonian Manuscripts (Claudius D 2) to be that of three grains of barley, dry and round, placed end to end lengthwise

पादाक suffix It is an अक or figure at the foot. Suffix or sub index is a character affixed below to a symbol, to distinguish it in its class Cf मूर्धांक superscript.

. पूर्णांक integer The Indian term is quite clear in its meaning and is more readily intelligible than its English equivalent पूर्णाक for integer, is used in Hindi, Bengali, etc

प्रचय common difference It is an ancient word

प्रति stands for anti-, प्रति घटीवत् is anti clockwise from घटीवत् clockwise वामावर्त and दक्षिणावर्त are ancient words and can be used as alternatives

प्रतिबन्ध condition Condition is that which limits or modifies the existence or character of something, a restriction or qualification The word is used in Hindi.

प्रतीक 'symbol' occurs as early as the छान्दोग्य उपनिषद्.

प्रतीप inverse, literally 'against प्रति the stream अप्

प्रनियम principle प्रनियम=प्रथमनियम. Principle is a comprehensive law or doctrine from which others are derived or on which others are founded, an elementary proposition or fundamental assumption The use of प्र in the sense of first is well-known. Cf. प्रकृति the original or

primitive substance प्रथम (प्र + तम) itself is a superlative of प्र.

प्रमेय for theorem is in use in several languages Guha's Anglo Bengali Dictionary gives प्रमेयोपपाद्य प्रमेय is that which is to be established by प्रमाण or proof Cf निर्मेय problem

प्राङ्गुल inch (see under पाद foot)

फल 'result is from सूर्यसिद्धान्त (the result of a calculation, product or quotient, etc )

बहिर्लेखन e cribe बहिर्लिखित escribed बहिर्लेखन is to write (or draw) externally Escribe is to draw (a circle) touching one side of a triangle externally बहिर्वृत्त excircle; बहिष्कोण exterior angle, बहिष्केन्द्र excentre

बिन्दुरेख *graph* बिन्दुरेख *is* literally dots and lines A graph is a diagram symbolising a system of interrelations by *spots* (बिन्दु), all distinguishable from one another and some connected by *lines* (रेखा) of the same kind

बिम्ब 'disc is an ancient word

भागफल quotient Quotient is literally 'how many times'. It is the number resulting फल from the division भाग of one number by another भागफल is current in Hindi and Bengali लीलावती gives फल, which we have already retained for result in general Other ancient words for quotient are भाग, लब्धि, आप्त, आप्ति अवाप्त, अवाप्ति, लब्ध

भिन्न 'fraction' is from लीलावती It is widely used in ancient Indian mathematics, some of its compounds are भिन्न सङ्कलन addition of fractions, भिन्न-गुणन multiplication of fractions, भिन्न घन the cube of a fraction, भिन्न भाग हार division of fractions (लीलावती)

भुज meaning the side of any geometrical figure has been used as early as कात्यायन श्रौतसूत्र

भिथश्छेदन intersect Intersect is to cut छेद into one another भिथ

यथार्थ exact Cf सुनम्य precise, शुद्ध correct, परिशुद्ध accurate

योग 'addition' is from सूर्यसिद्धान्त Cf वियोग 'subtraction' from गणिताध्याय.

राशि 'quantity', an ancient word, is current in Hindi, Bengali, etc

रैखिकी geometry रेखागणित, is in common use रैखिकी is short for रैखिकी विद्या the science pertaining to lines or the science of lines. Similarly प्राणिकी=प्राणिनी विद्या zoology, औद्भिदी=औद्भिदी विद्या botany

Naming of sciences was as varied in ancient days, as it is today in the European languages Sometimes abstract nouns were used as परचित्तज्ञता Chemistry, surgery are European examples of abstract nouns as names of sciences In the names of arts and crafts, some word denotative thereof, was suffixed— मधूच्छिष्टकृतम् wax modelling (मधूच्छिष्ट wax), सूचीकर्म needle work, मणिभूमिकाकर्म gem mosaic work. Sometimes the word denotative of art and craft was left out as in मणिराग colouring of precious stones The general action noun करण has been used in शुक्रनीतिसार in धातु साकर्य पार्थक्य करणम् the art of combination and isolation of minerals

कर्म standing for art was sometimes dropped particularly where the preceding word was itself a compound It was usual to transfer the neuter gender of कर्म to

the compound which was a sort of adjective made to serve as a noun We have a beautiful example in the समवायसूत्र, viz , उदकशुक्तिकम् The use of adjectives for naming sciences also became common, e g , सांख्यम् वैशेषिकम्, ऐन्द्रजालिकम्

As for arts and crafts the general term कर्म was a neuter noun, so for different branches of knowledge there was the general term विज्ञानम् शुक्रनीतिसार mentions धात्वादीनां संयोगापूर्वविज्ञानम् knowledge of new combinations of minerals, and काचपात्रादिकरणविज्ञानम् 'knowledge of making glass utensils

From the most ancient times we read of numerous विद्याs or sciences The परा and अपरा विद्या of the उपनिषद्s are well known Again, adjectival forms with feminine endings, originally intended to be followed by विद्या, have been used in the same way as the neuter उदकशुक्तिकम् मानसी thus is the science of the mind त्रयी, वार्ता, आन्वीक्षिकी are well known from the अर्थशास्त्र of Kautalya रामचन्द्र in his commentary on the first verse of लक्ष्मणकवि, a continuation of चम्पूरामायण of विदर्भराज, mentions two sciences अदृश्यकरणी and दूरकर्णी The commentators of श्रीमद्भागवत, such as श्रीधर, record वैनयिकी विद्य , वैजयिकी विद्या, व्यायामिकी विद्या, वैतालिकी विद्या

The adjectival suffix *ic* in English (ultimately derived from Skt इक, through Greek *ikos*, Latin *icus* and French *ique*) has been similarly used Greek or Latin nouns that were originally adjectives used substantively have been adopted into English, as arithmetic, music, logic, etc Since 1600 A D the

plural form *ics* has been used instead to denote names of sciences as in physics, mathematics, politics, athletics, economics This was probably in imitation of the Greek *ta phusika, ta ethika* It is further interesting to note that these plural forms are now construed as singulars In French and German the singular is still used in the names of sciences, e g , *die Physik, die Politik* in German and *la physique, la politique* in French

लम्ब 'perpendicular' is an ancient word Other words used in ancient works are अवलम्ब (लीलावती), अवलम्बक, अधोलम्ब, आलम्ब, वलम्ब, कोटि (the perpendicular side of a right-angled triangle, सूर्यसिद्धान्त) Compounds from लम्ब are समलम्ब having equal perpendiculars, अन्तर्लम्ब a triangle in which the perpendicular falls within, etc

लम्बकेन्द्र orthocentre Orthocentre is the common intersection of the three altitudes of a triangle, or of the four altitudes of a tetrahedron provided these latter meet in a point

लम्बकोण right angle i e , the angle कोण made by a perpendicular लम्ब In Hindi and Bengali समकोण is sometimes used for a right angle It is not a happy word because सम means equal

लम्बपूर (कोण) complementary (angle) लम्बपूर is short for लम्बकोणपूरक, that which completes पूरक a right angle लम्बकोण

वक्र 'curve' is an ancient word

वर्ग square, वर्गमूल square root In ancient usage वर्ग is the square of a number, e g , पञ्चवर्ग square of five भिन्नवर्ग square of a fraction वर्ग and वर्गमूल are widely current in Hindi, Bengali, Marathi, etc

वर्तुल 'circular' is an ancient word It is from √वृत् to turn, to revolve Cf वृत्त a circle

त्रिकोणमान theodolite Theodolite is an instrument for measuring horizontal and usually also vertical angles त्रिकोणमान is literally an instrument which measures मान angles कोण of various kinds त्रि, त्रि being short for विविध.

विकर्ण diagonal In ancient mathematics कर्ण has been used for hypotenuse and diagonal both कर्ण has been retained by us for hypotenuse, while the specificatory prefix वि (here short for विकर्ण) has been added to कर्ण to designate a diagonal

वियुत minus It is from सूर्यसिद्धान्त.

वियोग 'subtraction' is from गणिताध्याय Cf योग addition.

विषम 'odd,' is from बृहज्जातक of वराहमिहिर. Also current in Hindi, Marathi, Bengali, etc

वैकल्पिक 'alternative' is an ancient word It is used in Hindi, Bengali, etc

व्यञ्जक 'expression is the current Marathi word and is also an ancient usage

व्यास 'diameter' is from Vedic शुल्वसूत्रs

व्युत्क्रम reciprocal It is an ancient word meaning inverted order, so is the reciprocal of a function In Latin 'reciprocal is turning backward and forward.

वृत्त 'circle' is from गणिताध्याय It is current in many Indian languages

शकल sector (part of a circle) शकल means a fragment, piece, or bit In कादम्बरी of Bana occurs the expression चन्द्र शकल.

शतिक centesimal शतिक 'hundredth' occurs in वराहमिहिरs बृहत्संहिता

शतिमान centimeter Meter is from Latin *mensus* to measure, akin to Greek *metron* a measure, ultimately from Sanskrit √मा to measure In English meter has two senses (1) That which measures an instrument or an apparatus, e g, barometer, thermometer In this sense it is usually a suffix (2) A unit of length Its Indian counterpart is मान As a suffix it has been used in वर्षमान (कौटल्य अर्थशास्त्र) an instrument for measuring rainfall When standing by itself it has been used as a general word expressing measure as well as particular measures e g according to the commentator of तैत्तिरीयसंहिता and कात्यायन-श्रौतसूत्र 100 मानs make 5 पलs or पणs

The word मान can be made to cover both the usages of meter viz, (1) मान, meter, as the unit of length, and (2) मान as a suffix denoting a measuring instrument, e g, तापमान thermometer

Meter is subdivided into decimeter, centimeter, milli meter, etc Their Indian equivalents would be दशिमान, शतिमान, सहस्रिमान, etc Similarly for decameter, hectometer, kilometer, etc, which are its multiples the Indian equivalents would be दशमान, शतमान, सहस्रमान, etc (For the complete series see our tables of Weights and Measures, appended to the Great English Indian Dictionary)

शिरोदण्ड or शिरोवार bar = vinculum शिरोदण्ड or शिरोवार the bar at the top Vinculum is a straight horizontal mark placed over two or more members of a compound.

शिरोबिंदु vertex. In any figure having a base it is the point बिन्दु opposite to and farthest from, the base, the top शिरस्.

शून्य zero. It occurs in such works as गणिताध्याय and वराहमिहिर's बृहत्संहिता. From it are derived Gk. *kenos*, *keneos*, *Iennos*, etc. That the conception of zero is essentially Indian is now well known. According to the Encyclopaedia Britannica, the Sanskrit term शून्य passed into Arabic as *assifra*, from which are derived Italian, French and English *zero*

श्रित function. 'This term is used mostly to point out dependance on some certain variable or variables' Mathematics Dictionary by Glenn James and R. C. James. It is the past participle form from $\sqrt{}$श्रि to depend on. आश्रय is from the same root.

श्रेढी 'progression' is an ancient word meaning a particular numerical notation or progression of figures.

षष्ठक sextant. Sextant is the sixth part of a circle. It occurs as early as पाणिनि.

षाष्टिक sexagesimal, meaning pertaining to or founded on, the number sixty. षाष्टिक is the adjectival form of षष्टि sixty.

सचापारकोण radian. Radian is an angle कोण subtended by an arc चाप equal सं in length to the radius अर.

संपतन or संपात coincidence. The English word is derived from Latin *coincidere*, from *co* + *incidere* to fall on. संपतन=सं together + पतन falling.

संवादी 'corresponding' is an ancient word (e. g. in काव्यादर्श). Literally it means conversing with, hence agree-

ing or harmonizing with The English word 'correspond' (com + re pond) etymologically means 'to answer to' from which are derived its figurative senses 'to answer in fitness, character, function, amount'

सस्पर्श contact Contact is from Latin *con tactus* to touch on all sides सस्पर्श = स mutual, close + स्पर्श touch.

सत्यापन 'verification' is an ancient word The verbal form is सत्यापयति verifies

सदिश vector Vector (from Latin *vehere*, *vectum* to carry) is a complex entity representative of a directed magnitude सदिश means 'having a direction दिशा' Our word is clearer and will be more easily understood by the Indian students

समाग homogeneous, uniform Homogeneous is alike in nature and therefore, comparable in parts (सम alike + अग parts)

समान्तर श्रेढी arithmetic progression गुणोत्तर श्रेढी geometric progression Arithmetic progression — a progression श्रेढी whose elements progress by a constant (सम same) difference अन्तर (positive or negative) as 1, 3, 5, 7 or a, $a \pm d$, $a \pm 2d$, $a \pm 3d$ 'Arithmetic progression' is not a very intelligible expression Geometric progression is 'that in which elements progress by a constant factor, as 1, 2, 4 8, 16, any term is obtained by multiplying the preceding one by the constant factor' गुणोत्तर श्रेढी — गुण multiplication उत्तर successive, श्रेढी progression

सरलन simplify सरलन is a nominal verb (नामधातु) from सरल simple

सर्वाङ्गसम congruent. सर्वांगसम (सर्व+अंग+सम) equal in all parts. Congruent is from Latin 'to come together, coincide, agree'. In geometry it means superposable so as to be coincident throughout. For us सर्वांगसम is simpler and more expressive than congruent.

साद्यन्त throughout. साद्यन्त(स with+आदि beginning+अन्त end). It is prevalent in this sense in Hindi and Marathi.

सामि- The Latin prefix *semi-*, akin to Greek *hemi*, is related to Sanskrit सामि-. It is combined chiefly with adjectives and nouns meaning half. Cf. semiperimeter सामि परिमाप.

सारणी table. सारणी is from √सृ to run, the word originally means a running stream. Table signifies any collection and arrangement (generally in parallel columns) in a condensed form for ready reference of many particulars or values, as of weight, measures, etc. सारणी covers the meaning of the word table as implied by its 'running' character. The word is in common use among the astronomers of India

समायत square (figure). समायत is an आयत or rectangle with all the sides सम or equal. In Hindi वर्ग is used to denote a square figure as well as the product of a number or quantity multiplied by itself. We have retained वर्ग for the latter sense and समायत for the former.

सीमान्ते in the limit. सीमान्ते is the Sanskrit locative singular form from सीमान्त limit. In Hindi it can also be expressed by सीमान्त पर.

स्पज्या 'tangent' is short for स्पर्शज्या.

स्थिरांक 'constant', is a magnitude that is supposed not to change its value in a certain discussion or stage of

investigation The adding of अक to स्थिर makes the Indian word clearer

हर 'denominator' is an ancient word It is derived from √ हृ to take away i e to divide

*                    *                    *

During the course of last three years, I have had the privilege of enjoying the kind sympathy of the Hon ble Pt Ravi Shankar Shukla the Chief Minister of Madhya Pradesh To the Hon ble D K Mehta, my debt of gratitude is immense It is he who, as the Finance Minister of the State, set the ball rolling The Hon ble Pandit Dwarka Prasad Mishra with his unbounded love for Hindi has been taking personal interest and has gone so far as to establish a special department for the purpose of establishing Hindi and Marathi as the languages of this State To Lt Col N Ganguli, the Education Secretary in 1947 48 and his successor Dr V S Jha, I am indebted, for giving top priority to my requirements Since the establishment of the Languages Department in January, 1950, Shri A R Deshpande, the Under Secretary, has been extending to me his whole-hearted cooperation

My very special thanks are due to Lt Col Kunjilal Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University It is due to his love for Hindi and Marathi that the Nagpur University is leading India in the matter of introducing Hindi and Marathi as the media of instruction It was again due to him that the Nagpur University

has taken the heavy responsibility upon itself of publishing the text-books that were prepared under the orders of the Government of Madhya Pradesh.

Lastly my thanks are due to my colleagues, the authors of the text-books, who have been with me for the last three years. They have worked devotedly, fully convinced of the service that they are rendering to the nation. They have considered their work to be their reward.

**Raghu Vira**

---

The title page, preface and introduction have been printed at the Aryabharati Press, Nagpur.

# विषय सूची

# प्रस्तावना

मध्यप्रदेश के शासन के आदेशानुसार मैंने यह पुस्तक लिखनी आरम्भ की थी। इस पुस्तक के पारिभाषिक शब्द आचार्य डा० रघुवीर जी ने दिए हैं। यह उनकी सतत प्रेरणा और उत्साह वर्धन का ही फल है कि यह पुस्तक इस रूप में लिखी जा सकी। जहां तक सम्भव हुआ है इस पुस्तक को निर्दोष और सर्वांगपूर्ण बनाने का प्रयत्न किया गया है। आवश्यकतानुसार स्थान स्थान पर उदाहरण देकर विषय को समझाया गया है। विभिन्न प्रमेयों और उदाहरणों की साधना के लिए कई रीतियां दी गई हैं। इस दृष्टि से यह पुस्तक विद्यार्थियों के लिए विशेष उपयोगी सिद्ध होगी ऐसा मेरा विश्वास है।

जबलपुर के महाकोशल महाविद्यालय के गणित प्राध्यापक श्री नी० आ० शास्त्री ने समय-समय पर उपयोगी सुझाव देकर मुझे आभारी किया है। श्री वी० के० पराडकर एम्० एस्सी० ने इस पुस्तक के लिए कुछ उदाहरणों का संग्रह करने में मेरी सहायता की है। श्री रमेशचंद्र वर्मा एम्० एससी० ने इस पुस्तक का हिन्दी में अनुवाद किया है और श्री विजयेन्द्रकुमार माथुर एम्० ए० ने उन्हें भाषा की सहायता दी है। अन्त में श्री वि० शे० शर्मा ने भाषा की दृष्टि से इस पुस्तक की आवृत्ति की है और श्री अयोध्याप्रसाद श्रीवास्तव एम्० एस्सी० ने इस का प्रूफ देखा है। मैं इन सब का आभारी हूं।

य. वि. ठोसर

# विषय सूची

# समतल
# त्रिकोणमिति

# त्रिकोणमिति के महत्त्वपूर्ण सूत्र और फल

(important formulae and results in trigonometry)

१ वृत्त की परिधि $=$ २ प्या त्र

प्या $=$ ३·१४१५९ .........

$= \frac{२२}{७}$ लगभग

$\frac{१}{प्या} =$ ·३१८३१ ............

१ आर $=$ ५७° १७′ ४४·८″ लगभग

१ लंबकोण $=$ ९०° $=$ १००$^{अ}$ $= \frac{प्या}{२}$ आर

कोण का आरीयमाप $= \frac{चाप}{त्रिज्या}$

२ व्युज्या अ $= \frac{१}{ज्या अ}$

व्युत्कोज्या अ $= \frac{१}{कोज्या अ}$

कोस्प अ $= \frac{१}{स्प अ}$

$ज्या^2 अ + कोज्या^2 अ = १$

$व्युत्कोज्या^2 अ = १ + स्प^2 अ$

$व्युज्या^2 अ = १ + कोस्प^2 अ$

$$स्प\ अ = \frac{ज्या\ अ}{कोज्या\ अ}$$

$$कोस्प\ अ = \frac{कोज्या\ अ}{ज्या\ अ}$$

३. $ज्या ०^\circ = ०$, $कोज्या ०^\circ = १$, $स्प ०^\circ = ०$

$ज्या\ ३०^\circ = \frac{१}{२}$, $कोज्या\ ३०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}$, $स्प ३० = \frac{१}{\sqrt{३}}$

$ज्या\ ४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}}$, $कोज्या\ ४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}}$, $स्प\ ४५^\circ = १$

$ज्या\ ६०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}$, $कोज्या\ ६०^\circ = \frac{१}{२}$, $स्प\ ६०^\circ = \sqrt{३}$

$ज्या\ ९०^\circ = १$, $कोज्या\ ९०^\circ = ०$, $स्प\ ९०^\circ = \infty$

$ज्या\ १५^\circ = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$, $कोज्या\ १५^\circ = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}}$,

$स्प\ १५^\circ = २ - \sqrt{३}$

$ज्या\ ७५^\circ = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}}$, $कोज्या\ ७५^\circ = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$

$स्प\ ७५^\circ = २ + \sqrt{३}$

$$ज्या\ १८^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५}-१),\ कोज्या\ ३६^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५}+१),$$

$$स्प\ ३६^\circ = \frac{\sqrt{५}-१}{\sqrt{५}+१}$$

$$\underset{अ \to ०}{सी} \frac{ज्या\ अ}{अ} = १,\ \underset{अ \to ०}{सी}\ कोज्या\ अ = १,\ \underset{अ \to ०}{सी} \frac{स्प\ अ}{अ} = १$$

४. ज्या (−अ) = ज्या अ, कोज्या (−अ) = कोज्या अ

ज्या (९०° − अ) = कोज्या अ,

कोज्या(९०° − अ) = ज्या अ

ज्या (९०° + अ) = कोज्या अ,

कोज्या (९०° + अ) = − ज्या अ

ज्या (१८०° − अ) = ज्या अ,

कोज्या (१८०° − अ) = − कोज्या अ

ज्या (१८०° + अ) = − ज्या अ,

कोज्या (१८०° + अ) = − कोज्या अ

५. यदि ज्या अ = ज्या इ, तो अ = स प्या $\pm (-१)^{स}$ इ

यदि कोज्या अ = कोज्या इ, तो अ = २स प्या ± इ

यदि स्प अ = स्प इ, तो अ = स प्या + इ

६. ज्या (क + ख)

= ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क + ख)

= कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख.

$$\text{स्प (क + ख)} = \frac{\text{स्प क + स्प ख}}{\text{१ − स्पक स्प ख}}$$

ज्या (क − ख)

= ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क − ख)

= कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

$$\text{स्प (क − ख)} = \frac{\text{स्प क − स्प ख}}{\text{१ + स्प क × स्प ख}}$$

७. २ ज्या क कोज्या ख = ज्या (क + ख) + ज्या (क − ख)

२ कोज्या क ज्या ख = ज्या (क + ख) − ज्या (क − ख)

२ कोज्या क कोज्या ख = कोज्या (क + ख) + कोज्या (क − ख)

२ ज्या क ज्या ख = कोज्या (क − ख) − कोज्या (क + ख)

$$\text{ज्या ग + ज्या घ} = \text{२ज्या}\frac{\text{ग + घ}}{\text{२}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{ग − घ}}{\text{२}}$$

$$\text{ज्या ग − ज्या घ} = \text{२ कोज्या}\ \frac{\text{ग + घ}}{\text{२}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{ग − घ}}{\text{२}}$$

$$\text{कोज्या ग + कोज्या घ} = \text{२कोज्या}\frac{\text{ग + घ}}{\text{२}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{ग − घ}}{\text{२}}$$

$$\text{कोज्या ग} - \text{कोज्या घ} = २\text{ज्या}\frac{\text{ग}+\text{घ}}{२}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{घ}-\text{ग}}{२}$$

८. $\text{ज्या २ क} = २\ \text{ज्या क कोज्या क}$

$$\text{कोज्या २ क} = \text{कोज्या}^२\text{क} - \text{ज्या}^२\text{क} = २\ \text{कोज्या}^२\ \text{क} - १$$
$$= १ - २\text{ज्या}^२\text{क}$$

$$\text{स्प २ क} = \frac{२\ \text{स्प क}}{१ - \text{स्प}^२\ \text{अ}}$$

$\text{ज्या ३क} = ३\text{ज्या क} - ४\ \text{ज्या}^३\text{क}$

$\text{कोज्या ३क} = ४\ \text{कोज्या}^३\text{क} - ३\text{कोज्या क}$

$$\text{स्प ३ क} = \frac{३\text{स्प क} - \text{स्प}^३\text{क}}{१ - ३\text{स्प}^२\text{क}}$$

९. $\text{ज्या क} = २\ \text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}$

$$\text{कोज्या क} = \text{कोज्या}^२\frac{\text{क}}{२} - \text{ज्या}^२\frac{\text{क}}{२} = २\text{कोज्या}^२\ \frac{\text{क}}{२} - १$$
$$= १ - २\text{ज्या}^२\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{स्प क} = \frac{२\text{स्प}\frac{\text{क}}{२}}{१ - \text{स्प}^२\frac{\text{क}}{२}}$$

$$\text{ज्या क} = \frac{२\text{स्प}\frac{\text{क}}{२}}{१ + \text{स्प}^२\frac{\text{क}}{२}}$$

$$कोज्या\ क = \frac{१ - स्प^२ \frac{क}{२}}{१ + स्प^२ \frac{क}{२}}$$

$$१ - कोज्या\ क = २ज्या^२ \frac{क}{२}$$

$$१ + कोज्या\ क = २कोज्या^२ \frac{क}{२}$$

$$\frac{१ - कोज्या\ क}{१ + कोज्या\ क} = स्प^२ \frac{क}{२}$$

१० $\frac{ज्या\ क}{का} = \frac{ज्या\ ख}{खा} = \frac{ज्या\ ग}{गा}$

$कोज्या\ क = \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२\ खा\ गा}$, इत्यादि

$का = खा\ कोज्या\ ग + गा\ कोज्या\ ख$, इत्यादि

$ज्या \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{(सा - खा)(सा - गा)}{खा\ गा}}$, इत्यादि

$कोज्या \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{सा\ (सा - का)}{खा\ गा}}$, इत्यादि

$स्प \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{(सा - खा)(सा - गा)}{सा\ (सा - का)}}$, इत्यादि

ज्या क

$= \frac{२}{खा\ गा} \sqrt{सा\ (सा - का)(सा - खा)\ (सा - गा)}$,

इत्यादि

$स्प \left(\frac{ख - ग}{२}\right) = \left(\frac{खा - गा}{खा + गा}\right) कोस्प \frac{क}{२}$ ,.......इत्यादि

११. $\triangle = \frac{१}{२}$ खा गा ज्या क $= \frac{१}{२}$ गा का ज्या ख

$= \frac{१}{२}$ का खा ज्या ग

$= \sqrt{सा (सा - का)(सा - खा)(सा - गा)}$

$त्रा = \frac{का}{२ज्या क} = \frac{खा}{२ज्या ख} = \frac{गा}{२ज्या ग} = \frac{काखागा}{४\triangle}$

$त्र = \frac{\triangle}{सा} = (सा - का) स्प \frac{क}{२} = (सा - खा) स्प \frac{ख}{२}$

$= (सा - गा) स्प \frac{ग}{२} = ४त्रा ज्या \frac{क}{२} ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}$

$त्र_१ = \frac{\triangle}{सा - का}$

$= सा स्प \frac{क}{२}$ $४त्रा ज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}$

१२. वृत्तीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{(सा - का)(सा - खा)(सा - गा)(सा - घा)}$

वृत्त का क्षेत्रफल $= प्या त्र^२$

१२. $छे_{क}मन = छे_{क}म + छे_{क}न$

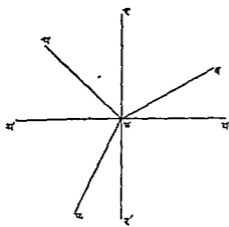
$$छे_{क}\frac{म}{न} = छे_{क}म - छे_{क}न$$

$$छे_{क}म^{न} = न \times छे_{क}म$$

$$छे_{क}म = छे_{ख}म \times छे_{क}ख$$

## पहला अध्याय

### कोण-मापन (Measurement of Angles)

११ त्रिकोणमिति (trigonometry) के कोण (angles) —रैखिकी (geometry) के अध्ययन से यह ज्ञात होता है कि दो सरल रेखाओं के मिथश्छेदन (intersection) से एक कोण बनता है; और इस कोण की अर्हा (value) सदा 0° और ३६०° के बीच होती है । यह कोण रैखिकी में सदा धन माना जाता है। त्रिकोणमिति में कोणों की कल्पना (conception) अधिक व्यापक है।

आ. १.१

मान लिया जाय कि मव रेखा एक ही समतल (plane) में म विंदु के चारों ओर घूम सकती है । यह रेखा प्रारंभिक स्थिति (initial-position) मय से चल कर प्रतिघटीवत् (anticlockwise) परिभ्रमण (revolve) करने के पश्चात् स्थिति मप पर पहुंचती है।

प्रारंभिक स्थिति मय से अंतिम स्थिति मप पर पंहुचने तक मप रेखा जिस कोण का अनुरेखन (trace) करती है वही मय और मप के बीच के कोण का माप (measure) है।

यदि मव परिभ्रमण रेखा (revolving line) मय स्थिति से घूमना आरम्भ कर प्रतिघटीवत् घूमती हुई मव स्थिति पर आकर रुके तो यमव न्यून कोण (acute angle) बनता है। यदि वह स्थिति मफ पर रुकती है तो जो फमय कोण बनता है वह दो लम्बकोणों (right augle) से बड़ा होता है। यदि म के चारों ओर एक पूर्ण परिभ्रमण करने के पश्चात् परिभ्रमणरेखा पुनः मव पर रुके तो अनुरेखित कोण चार लम्ब कोण + ∠यमव के सम होता है। मव रेखा का परिभ्रमण घटीवत् (clockwise) अथवा प्रतिघटीवत् हो सकता है। रूढी (convention) के अनुसार प्रतिघटीवत् भ्रमण से बनने वाले कोण धन (positive) और घटीवत् भ्रमण से बनने वाले कोण ऋण (negative) माने जाते हैं। इस प्रकार त्रिकोणमिति में कोण, किसी भी महत्ता (magnitude) के और किसी भी चिह्न के (धन अथवा ऋण) हो सकते है।

म को मूल बिन्दु (origin), मय को आदि-रेखा (initial line) और मव परिभ्रमण-रेखा को सदिश-त्रिज्या (radius vector) कहते हैं। रेखा यम को य' तक बढ़ाओ और उस पर रमर' लम्ब (perpendicular) खींचो। अब सम्पूर्ण समतल के चार विभाग हो जाते हैं जिनको चरण (quadrants) कहते हैं।

यमर पहिला चरण, रमय' दूसरा चरण, य'मर' तीसरा चरण और र'मय चौथा चरण है।

उदाहरण :— निम्नलिखित कोणों का अनुरेखण करो;

(१) १०००°

(५) −८१५°

१.२ कोण के मापन की तीन पद्धतियां हैं।

षाष्टिक (sexagesimal) पद्धति में एक लम्ब कोण के ९० समभाग किए जाते हैं। प्रत्येक भाग एक अंश (degree) कहलाता है। प्रत्येक अंश के पुनः ६० समभाग किए जाते हैं। प्रत्येक भाग कला (minute) कहलाता है। फिर प्रत्येक कला के ६० समभाग किए जाते हैं और प्रत्येक भाग काष्ठिका (second) कहलाता है।

∴ १ लम्ब कोण = ९०° (अंश)

१° = ६०′ (कला)

१′ = ६०″ (काष्ठिका)

१.२१: शतिक (centesimal) पद्धति में एक लम्ब कोण के १०० समभाग किए जाते हैं। प्रत्येक भाग अंशक (grade) कहलाता है। प्रत्येक अंशक १०० कलाओं में और प्रत्येक कला १०० काष्ठिकाओं में विभाजित की जाती है।

∴ १ लम्ब कोण = १००अं (अंशक)

१ अं = १००′ (कला)

१′ = १००′ (काष्ठिका)

१·२२ कोण-मापन की एक पद्धति का दूसरी पद्धति में परिवर्तन

$$१ \text{ लम्ब कोण} = ९०^\circ = १००^{अ}$$

$$\therefore \quad १^\circ = \left(\frac{१०}{९}\right)^{अ}$$

$$\text{और } १^{अ} = \left(\frac{९}{१०}\right)^\circ$$

उदाहरण १ —शतिक माप में व्यक्त करो—

(१) ४१° २२′ ३९″

(२) १५° ३२′ ५१″

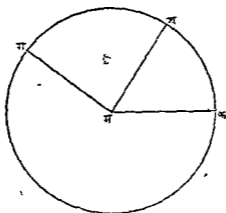
उदाहरण २ — षाष्टिक माप में व्यक्त करो—

(१) ७२अ ४३′ ६७″

(२) ८७अ १३′ ५५″

१·३ आरीय (radian) अथवा वर्तुल (circular) माप—

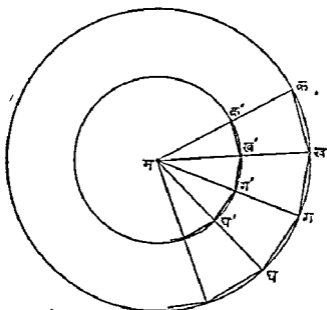
किसी वृत्त (circle) की त्रिज्या (radius) सम लम्बाई वाले चाप (arc) द्वारा वृत्तकेन्द्र (centre) पर आपातित (subtended) कोण को आर (radian) कहते हैं।

दी हुई आकृति (figure) में वृत्त कखग का केन्द्र म है और कख चाप वृत्त की त्रिज्या के सम लम्बा है। अतः कोण कमख का माप एक आर होगा। कोण कमख १ आ से दर्शाया जाता है।

आ. १.२

किसी भी कोण कमग का आरीय माप (circular measure) उसमें आरों की संख्या के समान है।

१.५ किसी भी वृत्त की परिधि (circumference) और व्यास (diameter) की निष्पत्ति (ratio) अचल (constant) रहती है।

बिन्दु म को केन्द्र मान कर दो वृत्त खींचो। बाहर वाले वृत्त में कखगघ ......, स भुजाओं के एक नियमित (regular) बहुभुज (polygon) का अन्तर्लेखन (inscribe) करो। इसकी कुछ त्रिज्यायें मक, मख, मग, मघ, .......लो जो अन्दर के वृत्त को क', ख', ग', घ', ...... बिन्दुओं पर छेदती हों। क'ख', ख'ग', ग'घ',....... को मिलाने से

अन्दर के वृत्त में भी स भुजाओं का एक नियमित बहुभुज क' ख' ग' घ'. अन्तर्लिखित होता है।

आ १ ३

अब, मक = मख

और मक' = मख'

अब त्रिभुज मकख और मक'ख' से,

$$\frac{\text{म क}}{\text{म क'}} = \frac{\text{म ख}}{\text{म ख'}}$$

और ∠म उभय साधारण (common to both) है

अतः ये दोनों त्रिभुज समरूप (similar) हैं।

$$\therefore \frac{\text{क ख}}{\text{क' ख'}} = \frac{\text{म क}}{\text{म क'}}$$

तो $\frac{\text{बहुभुज कखगघ....का परिमाप (perimeter)}}{\text{बहुभुज क' ख' ग' घ'... का परिमाप}} = \frac{\text{स·कख}}{\text{स· क'ख'}}$

$$= \frac{\text{कख}}{\text{क'ख'}}$$

$$= \frac{\text{म क}}{\text{म क'}}$$

भुजाओं की संख्या स चाहे कुछ भी हो यह सम्बन्ध सदा सत्य रहेगा। यदि संख्या स अनंत (infinite) बना दी जाय तो बहुभुजों के परिमाप संवादी (corresponding) वृत्तों की परिधि से लगभग संपाती (coincident) हो जायेंगे। इसलिए

$$\frac{\text{वृत्त कखगघ...की परिधि}}{\text{वृत्त क'ख'ग'घ' ...की परिधि}} = \frac{\text{मक}}{\text{मक'}}$$

$$= \frac{\text{वृत्त कखगघ...की त्रिज्या}}{\text{वृत्त क'ख'ग'घ'...की त्रिज्या}}$$

अथवा

$$\frac{\text{वृत्त कखगघ...की परिधि}}{\text{वृत्त कखगघ... की त्रिज्या}} = \frac{\text{वृत्त क'ख'ग'घ' ...की परिधि}}{\text{वृत्त क'ख'ग'घ' ...की त्रिज्या}}$$

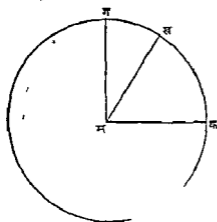
क्योंकि दोनों वृत्तों के आकार पर किसी प्रकार निबन्ध (restriction) नहीं रखा गया है इस लिए $\frac{\text{वृत्त-परिधि}}{\text{वृत्त-त्रिज्या}}$ निष्पत्ति प्रत्येक वृत्त के लिए एक ही

होनी चाहिए। और क्योंकि किसी भी वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या से दुगुना होता है इस लिए $\frac{\text{वृत्त परिधि}}{\text{वृत्त व्यास}}$ निष्पत्ति भी एक स्थिरांक (constant number) है। यह स्थिरांक 'प्या' अक्षर से दर्शाया जाता है। इसकी अर्हा लगभग ३.१४१५९......है।

उपप्रमेय— यदि किसी वृत्त की त्रिज्या त्र हो तो उसकी परिधि = २ त्र.प्या

= २ प्या.त्र.

१.५ एक लम्ब कोण में आरों की संख्या निश्चित करना:—

आ. १.४

म बिंदु, कखग वृत्त का केन्द्र है और त्र इस वृत्त की त्रिज्या है। ∠ कमग = ९०° और ∠ कमख = १ आ

क्योंकि वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर आपातित कोण उस चाप की लम्बाई का अनुपाती (proportional) है,

$\therefore \quad \frac{\angle \text{क म ग}}{\angle \text{क म ख}} = \frac{\text{चाप कग}}{\text{चाप कख}}$

$$= \frac{\frac{१}{४}\text{ परिधि}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{\frac{१}{४}(२\text{ प्या.त्र})}{\text{त्र}}$$

$$= \frac{\text{प्या}}{२}$$

$$\angle \text{ क म ग} = \frac{\text{प्या}}{२} \angle \text{ क म ख}$$

$$= \left(\frac{\text{प्या}}{२}\right)^{\text{आ}}$$

$\therefore$ एक लम्ब कोण $\frac{\text{प्या}}{२}$ आरों के सम है।

अथवा १ आर $= \left(\frac{२}{\text{प्या}}\right) \times$ १ लम्ब कोण

परंतु प्या एक स्थिरांक है,
इसलिए १ आर एक अचल कोण है।
१.६ आर की महत्ता—

$$१^{\text{आ}} = \frac{२}{\text{प्या}} \times १ \text{ लम्ब कोण}$$

$$= \frac{२ \times ९०^{\circ}}{\text{प्या}}$$

$=१८०^\circ \times (\cdot३१८३१\ldots)$

$=५६^\circ \times २९५८\ldots$

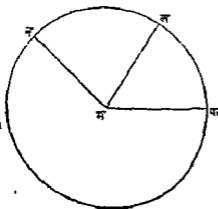
$=५७^\circ\ १७'\ ४४.८''$ (लगभग)

१.७ निम्नलिखित सूत्र की सहायता से आरीय, षाष्ठिक और शतिक मापों में परस्पर सम्बन्ध ज्ञात होता है।

$$\left(\frac{\text{ध्या}}{२}\right)^{\text{आ}} = ९०^\circ = १००^{\text{अ}}$$

ध्या का मूर्धांक प्रायः लिखा नहीं जाता; मान लिया जाता है।

१.८ किसी भी कोण का आरीय माप $= \dfrac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$

आ. १.५

मान लिया जाय कि कमव कोई भी एक कोण है जिसका आरीय माप निकालना है। म को केन्द्र मानकर मक के सम त्रिज्या का एक वृत्त खींचो जो मक और मव को क्रमशः (respectively) क और व में छेदन करे। परिधि पर बिंदु ख इस प्रकार लो कि

चाप कख = वृत्त-त्रिज्या

म और ख को मिलाओ।

तो $\angle$ कमख = १[आ]

$\therefore$ रैखिकी से,

$$\frac{\angle \text{ कमव}}{\angle \text{ कमख}} = \frac{\text{चाप कव}}{\text{चाप कख}}$$

$$= \frac{\text{चाप कव}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\therefore \angle \text{कमव} = \left(\frac{\text{चाप कव}}{\text{त्रिज्या}}\right) \times \angle \text{कमख}$$

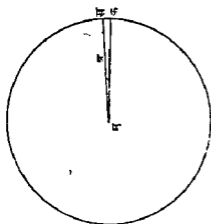
$$= \frac{\text{चाप कव}}{\text{त्रिज्या}} \times १^{\text{आ}}$$

$\therefore$ यदि कोण कमव का आरीय माप 'अ' हो चाप कव की लम्बाई 'व' हो और वृत्त-त्रिज्या 'त्र' हो तो

$$\text{अ} = \frac{\text{व}}{\text{त्र}}$$

अथवा व = त्र. अ

१.९ उदाहरण १:— यदि किसी गोल (sphere) के एक ही ध्रुव-वृत्त (meridian) पर स्थित दो विंदुओं के अक्षवृत्तों (latitudes) का अंतर ३°७′३०″ है और गोल-तल

(surface of sphere) पर मापित उनके बीच की दूरी ५ प्रांगुल (inch) है तो गोल की त्रिज्या का निश्चय करो।

$\left(\frac{१}{\text{π}} = \cdot३१८३१\right)$

ध्रुव-वृत्त समतल (meridian plane) कमख द्वारा गोल का छेद (section) आकृति में दर्शाया गया है।

बिंदु म गोल का केन्द्र और त्र उसकी त्रिज्या है।

आ १·६

तो $\frac{\text{चाप कख}}{\text{त्रिज्या}} = \angle$ कमख का आरीय माप

चाप कख = ५ प्रांगुल

और $\angle$ कमख = ३°७′३०″

$\therefore \frac{५}{\text{त्र}}$ = कोण (३°७′३०″) में आरों की संख्या

= कोण $\left(३\frac{१}{८}^{\circ}\right)$ में आरों की संख्या

= कोण $३\frac{१}{८} \times \frac{\text{π}}{१८०}$

$\therefore$ ञ = $\frac{५ \times ८ \times १८०}{२५ \times प्या}$ = २८८ × ·३१८३१

= ९१·६७३२८ ... प्रांगुल

उदाहरण २ :— एक त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेढी (arithmetical progression) में हैं। यदि

$\frac{\text{उसके लघुतम कोण में प्रारों की संख्या}}{\text{उसके महत्तम कोण में अंशकों की संख्या}} = \frac{\text{प्या}}{४००}$ हो तो

त्रिभुज के कोण अंशों में व्यक्त करो।

मान लो कि त्रिभुज के कोण (य − र)°, य° और (य + र)° है।

त्रिभुज के तीन कोणों का योग १८०° है,

$\therefore$ (य − र) + य + (य + र) = १८०

अथवा ३ य = १८०

$\therefore$ य = ६०

$\therefore$ त्रिभुज के कोण (६० − र)°, ६०° और (६० + र)° हैं।

अब (६० − र)° = $\left\{\frac{\text{प्या}}{१८०}\ (६० - र)\right\}^{\text{आ}}$

और (६० + र)° = $\left\{(६० + र)\frac{१०}{९}\right\}^{\text{अं}}$

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$\frac{\frac{\text{प्या}}{१८०}(९० - र)}{(६० + र)\frac{१०}{९}} = \frac{\text{प्या}}{४००}$$

अथवा $\frac{\text{प्या}}{२००}\left(\frac{६० - र}{६० + र}\right) = \frac{\text{प्या}}{४००}$

अथवा $२(६० - र) = ६० + र$

$\therefore र = २०$

$\therefore$ अपेक्षित तीन कोण ८०°, ६०° और ८०° हैं।

## प्रश्नावलि १

१. ४२ प्रांगुल का एक वर्तुल बिम्ब (disc) भूमि पर घूमता हुआ छोड़ा जाता है। निश्चय करो कि बिम्ब के एक पूर्ण परिभ्रमण में उसका केन्द्र कितनी दूर आगे बढ़ेगा। $\left(\text{प्या} = \frac{२२}{७}\right)$

२. एक छोटा कीड़ा एक स्थिर (fixed) एकरूप (uniform) वृत्ताकार तार पर चल रहा है। वह प्रत्येक कला (minute of time) में १३२ शतिमान (centimetre) के अर्घ (rate) से चलता हुआ १७ कलाओं में तार की तीन पूरी प्रदक्षिणाएं कर लेता है। उस वृत्ताकार तार की त्रिज्या निकालो। $\left(\frac{१}{\text{प्या}} = \cdot३१८३१\right)$

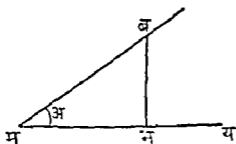
३. दो नियमित बहुभुजों की भुजाओं की संख्याओं की निष्पत्ति २:७ है। पहिले बहुभुज के एक कोण में अंशों की संख्या और दूसरे बहुभुज के एक कोण में अंशकों की संख्या ४२:५५ निष्पत्ति में है। बहुभुजों की भुजाओं की संख्या निश्चित करो।

४. एक पंचभुज (pentagon) के कोण समान्तर श्रेढी में हैं और उसका महत्तम कोण उसके लघुत्तम कोण से दुगना है तो पंचभुज के कोणों की अर्हापें अंशों में और आरीय माप में निकालो।

५. (१) २॥ बजे (२) ७ बजकर २० कला पर और (३) पौने दस बजे घड़ी के कांटों के बीच के कोणों को अंशों, अंशकों और आरों में व्यक्त करो।

६. कितनी दूरी पर ५ पाद (feet) ऊंचा एक मनुष्य २०′ के कोण का आपातन करेगा? $\left(\frac{१}{\text{ज्या}} = \cdot ३१८३१\right)$

# दूसरा अध्याय

## न्यून कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां

आ. २.१

मान लो कि यमय एक न्यूनकोण है जिसका माप अ है। रेखा मय पर कोई बिंदु य लेकर मय पर यभ लंब खींचो। △यमभ में मय कर्ण (hypotenuse), यभ लंब और मभ आधार (base) है।

तो कोण अ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की परिभाषाएं (definitions) इस प्रकार हैं।

कोण अ की ज्या (sine) अथवा $\text{ज्या}(\text{अ}) = \frac{\text{भय}}{\text{मय}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

कोण अ की कोटिज्या (cosine)

$$\text{अथवा कोज्या (अ)} = \frac{\text{मभ}}{\text{मय}} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

कोण अ की स्पज्या (tangent) अथवा $\text{स्प (अ)} = \frac{\text{भय}}{\text{मभ}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

कोण अ की व्युत्क्रमज्या (cosecant)

$$\text{अथवा व्युज्या(अ)} = \frac{\text{मव}}{\text{भव}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$$

कोण अ की व्युत्क्रम कोटिज्या (secant)

$$\text{अथवा व्युत्कोज्या(अ)} = \frac{\text{मव}}{\text{मभ}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

कोण अ की कोटि स्पज्या (cotangent) अथवा कोस्प

$$\text{(अ)} = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}} = \frac{\text{आधार}}{\text{लंब}}$$

इन छै निष्पत्तियों के अतिरिक्त दो और निष्पत्तियां होती हैं जिनका उपयोग बहुत कम होता है। ये निम्नलिखित हैं:—

कोण अ की उत्क्रमज्या (versed sine)

अथवा उज्या (अ) = १ − कोज्या (अ)

कोण अ की उत्क्रम कोटिज्या (coversed sine) अथवा

उत्को (अ) = १ − ज्या (अ)

ध्यान रखना चाहिए कि इनमें से प्रत्येक त्रिकोणमितीय निष्पत्ति दो आयामों (length) की निष्पत्ति होने के कारण केवल एक संख्यात्मक (numerical) राशि (quantity) है।

२.२ त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की अर्हाओं की सीमा (limits) पिछले अनुच्छेद (last article) की आकृति से यह स्पष्ट है कि कोण अ की अर्हा चाहे कुछ भी हो, परन्तु

वभ < मन

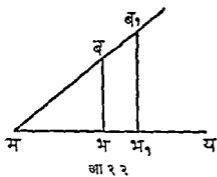
और मभ < भव

इसलिए किसी भी कोण की ज्या और कोटिज्या १ से अधिक कदापि नहीं हो सकती।

इसी प्रकार किसी भी कोण की व्युत्क्रम कोटिज्या और व्युत्क्रम ज्या १ से कम कदापि नहीं हो सकती।

∠ यमभ की भिन्न २ अर्हाओं के अनुसार भव और मभ स्वतन्त्ररूप से कोई भी अर्हाएं प्राप्त कर सकती हैं अतः स्पज्या और कोटि स्पज्या की अर्हाओं की कोई सीमा निश्चित नहीं की जा सकती।

इनकी अर्हाएं शून्य से लेकर अनन्ती (infinity) तक हो सकती हैं।

२.३ किसी भी दत्त कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां सदा अपरिवर्ती होती हैं।

मान लो यमव एक कोण है। रेखा मव पर व और व, दो बिंदु लो। अव व और व, से रेखा मय पर क्रमशः वभ और व,भ, लम्ब खींचो। त्रिभुज वमभ और व,मभ, में कोण म साधारण है,

∠ व भ म = ∠ व,भ,म (∴ प्रत्येक = १लम्बकोण)

∴ त्रिभुज वभम और व,भ,म समरूप हैं।

अतः $\frac{मय}{मव} = \frac{म_1य_1}{मव_1}$

इसका अर्थ यह है कि व विन्दु मव रेखा पर चाहे कहीं भी रहे, कोण यमव की ज्या की अर्हा सदा एक ही रहती है। इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि ∠यमव की (अर्थात् किसी भी कोण की) अन्य त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां भी सदा एक ही रहती हैं।

२.४ व्युत्क्रम सम्बन्ध (reciprocal relations) — अनुच्छेद २.१ की आकृति से,

$$ज्या (अ) \, व्युज्ज्या (अ) = \frac{भय}{मय} \times \frac{मय}{भय}$$

$$= १$$

$$\therefore व्युज्ज्या (अ) = \frac{१}{ज्या(अ)} \cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

इसी प्रकार यह भी दिखाया जा सकता है

$$कि \; व्युत्कोज्या (अ) = \frac{१}{कोज्या (अ)} \cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

$$और \; कोस्प (अ) = \frac{१}{स्प (अ)} \cdots\cdots\cdots \quad (३)$$

आलोक (note) :— अब आगे ज्या (अ), कोज्या (अ), स्प(अ) इत्यादि निष्पत्तियां क्रमशः ज्याअ, कोज्याअ, स्पअ इस प्रकार लिखी जायंगी।

२.५ मूलभूत ऐकात्म्य (fundamental identities)—
अनुच्छेद २.१ की आकृति में,

$\angle$ मभव = ९०°

$\therefore$ मव² = भव² + मभ²

इस समीकार को क्रमशः मव², मभ² और भव² से भाग देने पर,

$$\left(\frac{भव}{मव}\right)^२ + \left(\frac{मभ}{मव}\right)^२ = १ \quad ............(क)$$

$$\left(\frac{मव}{मभ}\right)^२ = \left(\frac{भव}{मभ}\right)^२ + १ \quad ............(ख)$$

और $$\left(\frac{मव}{भव}\right)^२ = १ + \left(\frac{मभ}{भव}\right)^२ \quad ............(ग)$$

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की परिभाषाओं के अनुसार संबंध (क) का निम्नलिखित रूपान्तरण (transformation) हो जाता है:—

(ज्याअ)² + (कोज्याअ)² = १

अथवा ज्या² अ + कोज्या² अ = १ ............(४)

इसी प्रकार संबन्ध (ख) और (ग) का क्रमशः (५) और (६) में रूपान्तरण हो जाता है—

व्युत्कोज्या² अ = १ + स्प² अ ............(५)

व्युज्ज्या² अ = १ + कोस्प² अ ............(६)

मव $$\frac{ज्या\ अ}{कोज्या\ अ} = \frac{भव/मव}{मभ/मव} = \frac{भव}{मभ} = स्प\ अ$$

अर्थात् स्प अ $= \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$ ...... ............(७)

इसी प्रकार कोस्प अ $= \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}}$ ............(८)

२·६ अब ऊपर सिद्ध किए गए मूलभूत सम्बन्धों के आधार पर कुछ उदाहरण साधित (solved) किए जायंगे।

उदाहरण १— सिद्ध करो कि

$$\sqrt{\frac{१-\text{ज्या अ}}{१+\text{ज्या अ}}}\sqrt{\frac{\text{व्युत्कोज्या अ}+१}{\text{व्युत्कोज्या अ}-१}} = \text{कोस्प अ}\left(\frac{१+\text{कोज्या अ}}{१+\text{ज्या अ}}\right)$$

$$\text{वाम पक्ष} = \sqrt{\frac{१-\text{ज्या}^२\text{ अ}}{(१+\text{ज्या अ})^२}}\sqrt{\frac{(\text{व्युत्कोज्या अ}+१)^२}{\text{व्युत्कोज्या}^२\text{ अ}-१}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या अ}}{१+\text{ज्या अ}} \times \frac{\text{व्युत्कोज्या अ}+१}{\text{स्प अ}}$$

$$= \frac{१+\text{कोज्या अ}}{(१+\text{ज्या अ})\text{ स्प अ}}$$ गतानुच्छेद के (४) और (५) से

$$= \text{कोस्प अ}\cdot\frac{१+\text{कोज्या अ}}{१+\text{ज्या अ}}$$

= दक्षिण-पक्ष

उदाहरण २— सिद्ध करो कि

(१ + कोस्प अ − व्युज्ज्या अ)(१ + स्पअ + व्युत्कोज्या अ) = २

$$\text{वाम पक्ष} = \left(\text{१} + \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} - \frac{\text{१}}{\text{ज्या अ}}\right) \times \left(\text{१} + \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} + \frac{\text{१}}{\text{कोज्या अ}}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} - \text{१}}{\text{ज्या अ}}\right) \times \left(\frac{\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} + \text{१}}{\text{कोज्या अ}}\right)$$

$$= \frac{(\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ})^{\text{२}} - \text{१}}{\text{ज्या अ.कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{ अ} + \text{ज्या}^{\text{२}}\text{ अ} + \text{२ ज्या अ कोज्या अ} - \text{१}}{\text{ज्या अ . कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{२ ज्या अ . कोज्या अ}}{\text{ज्या अ . कोज्या अ}} \quad (\because \text{ज्या}^{\text{२}}\text{ अ} + \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{ अ} = \text{१})$$

$$= \text{२}$$

उदाहरण३— सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या}^{\text{६}}\text{ अ} + \text{ज्या}^{\text{६}}\text{ अ} = \text{१} - \text{३ ज्या}^{\text{२}}\text{ अ (१} - \text{ज्या}^{\text{२}}\text{ अ)}$$
$$= \text{१} - \text{३ कोज्या}^{\text{२}}\text{ अ (१} - \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{ अ)}$$

$$\text{वाम पक्ष} = (\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{ अ} + \text{ज्या}^{\text{२}}\text{ अ}) \times (\text{कोज्या}^{\text{४}}\text{ अ} - \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{ अ ज्या}^{\text{२}}\text{अ} + \text{ज्या}^{\text{४}}\text{ अ})$$

$$= \text{कोज्या}^4 \text{ अ} - \text{कोज्या}^2 \text{ अ ज्या}^2 \text{ अ} + \text{ज्या}^4 \text{ अ}$$

$$[\because \text{ ज्या}^2 \text{ अ} + \text{कोज्या}^2 \text{ अ} = १$$

$$= (\text{कोज्या}^2 \text{ अ} + \text{ज्या}^2 \text{ अ})^2 - ३ \text{ कोज्या}^2 \text{ अ ज्या}^2 \text{ अ}$$

$$= १ - ३ \text{ ज्या}^2 \text{ अ} (१ - \text{ज्या}^2 \text{ अ})$$

$$= १ - ३ \text{ कोज्या}^2 \text{ अ} (१ - \text{कोज्या}^2 \text{ अ})$$

## प्रश्नावलि २

निम्नलिखित ऐकात्म्यों को सिद्ध करोः—

(१) $\dfrac{\text{ज्या अ} + \text{व्युत्कोज्या अ}}{\text{कोज्या अ} + \text{व्युज्ज्या अ}} = \text{स्प अ}$ [बनारस १९३८

(२) $\text{व्युज्ज्या}^4 \text{ अ} - \text{कोस्प}^4 \text{ अ} = १ + २ \text{ कोस्प}^2 \text{अ}$

(३) $\text{व्युत्कोज्याअ} - \text{स्प अ} = \dfrac{\text{कोस्प अ}}{१ + \text{व्युज्ज्या अ}}$

(४) $\sqrt{\dfrac{\text{व्युत्कोज्या अ} - १}{\text{व्युत्कोज्या अ} + १}} = \text{व्युज्ज्या अ} - \text{कोस्प अ}$

(५) $\dfrac{\text{कोस्प अ} + \text{व्युज्ज्या अ} - १}{\text{कोस्प अ} - \text{व्युज्ज्या अ} + १} = \sqrt{\dfrac{१ + \text{कोज्या अ}}{१ - \text{कोज्या अ}}}$

(६) $\text{कोस्प}^2 \text{अ} + \text{कोस्प}^4 \text{अ} = \text{व्युज्ज्या}^4 \text{अ} - \text{व्युज्ज्या}^2 \text{अ}$

(७) $\text{व्युत्कोज्या}^2 \text{अस्पअ} + 2 \text{ व्युत्कोज्या अ. व्युज्ज्या अ} + \text{व्युज्ज्या}^2 \text{अ. कोस्प अ} = \text{व्युत्कोज्या}^3 \text{अ} \times \text{व्युज्ज्या}^3 \text{अ}$ [बनारस १९४२

(८) $\frac{\text{स्प}^2 \text{अ}}{१ + \text{स्प}^2 \text{अ}} \cdot \frac{१ + \text{कोस्प}^2 \text{अ}}{\text{कोस्प}^2 \text{अ}} = \text{ज्या}^2 \text{अ} \times \text{व्युत्कोज्या}^2 \text{अ}$

(९) $\frac{१}{\text{व्युत्कोज्या अ} + \text{स्प अ}} - \frac{१}{\text{कोज्या अ}} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}} - \frac{१}{\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{स्प अ}}$

(१०) $\text{व्युत्कोज्या अ} + \text{स्प अ} = \frac{१ + \text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{१ - \text{ज्या अ}} = \frac{१ + \text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ}}{१ + \text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ}}$ [नागपूर १९३९

(११) $\frac{\text{कोस्प क} - \text{स्प ख}}{\text{कोस्प ख} - \text{स्प क}} = \text{कोस्प क स्प ख}$

(१२) $१ - \frac{\text{ज्या}^2 \text{अ}}{१ + \text{कोस्प अ}} - \frac{\text{कोज्या}^2 \text{अ}}{१ + \text{स्प अ}} = \text{ज्या अ कोज्या अ}$ [बनारस १९४८

(१३) $\frac{\text{कोज्या अ}}{१ - \text{स्प अ}} + \frac{\text{ज्या अ}}{१ - \text{कोस्प अ}} = \text{ज्या अ} + \text{कोज्या अ}$ [बनारस १९४५

(१४) $ज्या^{६} अ + ज्या^{४} अ कोज्या^{२} अ - ज्या^{२} अ कोज्या^{४} अ - कोज्या^{६} अ = ज्या^{२} अ - कोज्या^{२} अ$

(१५) $(कोस्प अ + व्युज्ज्या अ)^{२} = \frac{१ + कोज्या अ}{१ - कोज्या अ}$

(१६) $२ स्प^{२} अ = \frac{१}{व्युज्ज्या अ - १} - \frac{१}{व्युज्ज्या अ + १}$

[नागपुर १९२९

(१७) $\frac{कोज्या अ}{१ - ज्या अ} + \frac{१ - ज्या अ}{कोज्या अ} = २ व्युत्कोज्या अ$

(१८) $\frac{२ व्युत्कोज्या अ स्प अ - स्प अ}{१ - व्युत्कोज्या अ + व्युत्कोज्या^{२} अ + स्प^{२} अ} = ज्या अ$

(१९) $(स्प क + व्युज्ज्या ख)^{२} - (कोस्प ख - व्युत्कोज्या क)^{२} = २ स्प क कोस्प ख (व्युज्ज्या क + व्युत्कोज्या ख)$

(२०) यदि $स्प अ + ज्या अ = म$ और $स्प अ - ज्या अ = न$ तो सिद्ध करो कि $म^{२} - न^{२} = ४ \sqrt{मन}$

[बनारस १९३२

(२१) ज्या अ के पदों में (in terms of) व्यक्त करो:—

$(व्युत्कोज्या अ - कोज्या अ) \sqrt{\frac{१ - ज्या अ}{१ + ज्या अ}}$

(२२) व्युत्कोज्या अ के पदों में व्यक्त करो :—

$$\text{कोज्या अ} + \frac{\text{स्पअ कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} + \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}$$

[बनारस १८९९

२·७ यदि किसी कोण की कोई भी एक त्रिकोणमितीय निष्पत्ति दी गई हो तो उसकी अन्य निष्पत्तियां भी जानी जा सकती हैं।

उदाहरण १— किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी कोटिज्या के पदों में व्यक्त करो।

मान लो कि कोज्या अ = क्ष

$$\text{तो ज्या अ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^2\text{अ}}$$

$$= \sqrt{१ - \text{क्ष}^2}$$

$$\text{व्युज्ज्या अ} = \frac{१}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{१ - \text{क्ष}^2}}$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$$

$$= \frac{१}{\text{क्ष}}$$

$$स्प\ अ = \frac{ज्या\ अ}{कोज्या\ अ}$$

$$= \frac{\sqrt{१ - क्ष^२}}{क्ष}$$

$$कोस्प\ अ = \frac{कोज्या\ अ}{ज्या\ अ}$$

$$= \frac{क्ष}{\sqrt{१ - क्ष^२}}$$

उदाहरण २— यदि कोस्प $अ = \frac{३}{\sqrt{७}}$ हो तो कोण अ की अन्य त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की संख्यात्मक अर्हाएं निश्चित करो।

आ ० ३

लंब कोण त्रिभुज बमभ में

$\angle भमब = अ$,

$भब = \sqrt{७}$

और $मभ = ३$

जिससे कोस्प $अ = \frac{३}{\sqrt{७}}$

अब $मब = \sqrt{मभ^२ + भब^२}$

$= \sqrt{९ + ७}$

$= ४$

$$\therefore \quad \text{ज्या अ} = \frac{\text{भच}}{\text{मच}} = \frac{\sqrt{७}}{४}$$

$$\text{और व्युज्ज्या अ} = \frac{४}{\sqrt{७}}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{१}{\text{कोस्प अ}} = \frac{\sqrt{७}}{३}$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{३}{४}$$

$$\text{और व्युत्कोज्या अ} = \frac{४}{३}$$

उदाहरण ३— यदि $\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{स्प अ} = \sqrt{\frac{३}{५}}$

तो ज्या अ की अर्हा निश्चित करो।

$$\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{स्प अ} = \frac{१ - \text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$$

$$= \frac{१ - \text{ज्या अ}}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}}$$

$$= \frac{\sqrt{१ - \text{ज्या अ}}}{\sqrt{१ + \text{ज्या अ}}}$$

$$\text{अर्थात} \sqrt{\frac{१ - \text{ज्या अ}}{१ + \text{ज्या अ}}} = \sqrt{\frac{३}{५}}$$

$$\therefore \qquad \frac{१ - ज्या\ अ}{१ + ज्या\ अ} = \frac{३}{५}$$

अथवा $८\ ज्या\ अ = २$

$$\therefore \qquad ज्या\ अ = \frac{१}{४}$$

उदाहरण ४— यदि कोस्प $अ = \frac{क्ष}{य}$

तो $\dfrac{क्ष\ कोज्या\ अ - य\ ज्या\ अ}{क्ष\ कोज्या\ अ + य\ ज्या\ अ}$ की अर्हा निकालो।

[अंश (numerator) और हर (denominator) को ज्या अ से भाग देने पर]

$$\frac{क्ष\ कोज्या\ अ - य\ ज्या\ अ}{क्ष\ कोज्या\ अ + य\ ज्या\ अ} = \frac{क्ष\ कोस्प\ अ - य}{क्ष\ कोस्प\ अ + य},$$

$$= \frac{क्ष \cdot \frac{क्ष}{य} - य}{क्ष \cdot \frac{क्ष}{य} + य}$$

$$= \frac{क्ष^२ - य^२}{क्ष^२ + य^२}$$

## प्रश्नावलि ३

(१) किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी ज्या के पदों में व्यक्त करो।

(२) किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी स्पर्शज्या के पदों में व्यक्त करो।

(३) किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी व्युत्क्रम कोटिज्या के पदों में व्यक्त करो।

(४) ज्या अ और कोज्या अ को कोस्प अ के पदों में व्यक्त करो।

(५) कोज्या अ और कोस्प अ को व्युज्ज्या अ के पदों में व्यक्त करो।

(६) यदि किसी कोण की ज्या, $\frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}+२\text{य})}{\text{क्ष}^२+२\text{क्षय}+२\text{य}^२}$ हो तो

उस कोण की अन्य निष्पत्तियों की अर्हाएं निश्चित करो [कलकत्ता १८७९

(७) यदि २व्युत्कोज्या अ $=\frac{\text{य}}{\text{र}}+\frac{\text{र}}{\text{य}}$ तो

(व्युज्ज्या अ + कोस्प अ) की अर्हा निश्चित करो।

(८) यदि ज्याअ $=\frac{१}{\sqrt{५}}$ तो

$\frac{\text{कोस्प}^२\text{अ}-\text{स्प}^२\text{अ}}{\text{कोस्प}^२\text{अ}+\text{स्प}^२\text{अ}}$ की अर्हा निश्चित करो।

(९) यदि स्पअ $= \frac{१}{\sqrt{३}}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{व्युज्ज्या}^{२}\text{अ} - \text{व्युत्कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{व्युज्ज्या}^{२}\text{अ} + \text{व्युत्कोज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{१}{२}$$

(१०) यदि स्प$^{२}$अ $=$ १ $-$ र$^{२}$ हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{व्युत्कोज्या अ} + \text{स्प}^{३}\text{अ व्युज्ज्या अ} = (२ - \text{र}^{२})^{\frac{३}{२}}$$

[बनारस १९८८

## प्रश्नावलि ३

(१) किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी ज्या के पदों में व्यक्त करो।

(२) किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी स्पर्शज्या के पदों में व्यक्त करो।

(३) किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी व्युत्क्रम कोटिज्या के पदों में व्यक्त करो।

(४) ज्या अ और कोज्या अ को कोस्प अ के पदों में व्यक्त करो।

(५) कोज्या अ और कोस्प अ को व्युज्ज्या अ के पदों में व्यक्त करो।

(६) यदि किसी कोण की ज्या, $\frac{क्ष(क्ष+२य)}{क्ष^२+२क्षय+२य^२}$ हो तो

उस कोण की अन्य निष्पत्तियों की अर्हाएं निश्चित करो [कलकत्ता १८७९

(७) यदि २व्युत्कोज्या अ $=\frac{य}{र}+\frac{र}{य}$ तो

(व्युज्ज्या अ + कोस्प अ) की अर्हा निश्चित करो।

(८) यदि ज्याअ $=\frac{१}{\sqrt{५}}$ तो

$\frac{कोस्प^२अ - स्प^२अ}{कोस्प^२अ + स्प^२अ}$ की अर्हा निश्चित करो।

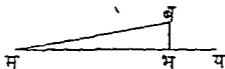
$$\text{कोज्या } (९०° - \text{अ}) = \frac{\text{भव}}{\text{मव}} = \text{ज्या अ.}$$

$$\text{स्प } (९०° - \text{अ}) = \frac{\text{मभ}}{\text{भव}} = \text{कोस्प अ.}$$

इसी प्रकार निम्नलिखित सम्बन्ध भी सिद्ध किए जा सकते हैं :

व्युज्या (९०° − अ) = व्युत्कोज्या अ
व्युत्कोज्या (९०° − अ) = व्युज्ज्या अ
और कोस्प (९०° − अ) = स्प अ

अब, अधिक प्रयोग में आने वाले कुछ प्रमाप कोणों की त्रिकोणामितीय निष्पत्तियों का निश्चय किया जायगा।

३.२ $0°$ की निष्पत्तीयां.

आ. ३·२

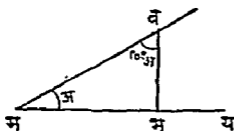
मान लो कि एक छोटा सा कोण यमव, निश्चत आयाम (fixed length) की सदिश त्रिज्या मव से अनुरेखित किया गया है।

मय पर वभ लंब खींचो।

$$\text{तो ज्या यमव} = \frac{\text{भव}}{\text{मव}}$$

## तीसरा अध्याय

# कुछ प्रमाप (standard) कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां

**३.१ लम्बपूरक (complementary) कोणों की निष्पत्तियां—**

आ. ३·१

मानलो कि यमय एक न्यूनकोण है। रेखा मय के किसी विन्दु व से रेखा मय पर वभ लम्ब खींचो। लम्बकोण त्रिभुज मवभ में कोण मवभ कोण वमभ का लम्ब-पूरक होगा।

$$\text{यदि } \angle \text{वमभ} = \text{अ हो, तो}$$
$$\angle \text{मवभ} = ९०° - \text{अ, होगा।}$$

आकृति से, ज्या $(९०° - \text{अ}) = \dfrac{\text{मभ}}{\text{मव}}$ = कोज्या अ

अब किसी परिमित (finite) राशि का हर कोई अत्यन्त छोटी (infinitely small) राशि हो तो लब्धि = एक अनंत राशि।

इस प्रकार की अतिमहान् राशि ∞ चिह्न से दर्शाई जाती है।

$$\therefore \text{व्युज्ज्या } 0^\circ = \infty$$

$$\text{पुनः व्युत्कोज्या}0^\circ = \frac{1}{\text{कोज्या}0^\circ}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

$$\text{और} \quad \text{कोस्प } 0^\circ = \frac{1}{\text{स्प}0^\circ}$$

$$= \frac{1}{0}$$

$$= \infty$$

३·२१ ९०° अथवा $\frac{\text{प्या}}{2}$ की निष्पत्तियां

कोण 0° और ९०° लम्बपूरक हैं।

अतः अनुच्छेद ३·१ और ३·२ से,

$$\text{ज्या } 90^\circ = \text{कोज्या } 0^\circ$$

$$= 1$$

$$\text{कोज्या } 90^\circ = \text{ज्या } 0^\circ$$

अब यदि कोण भमय का धीरे धीरे इतना ह्रास होजाय कि मय और मभ एक दूसरे से सम्पाती हो जायं तो कोण भमय शून्य सम हो जाता है और इस दशा में भय = ०

इसलिए, ज्या० $= \frac{०}{मय} = ०$

कोज्या भमय $= \frac{मभ}{मय}$

जब ∠भमय शून्य होता है तो मभ और मय संपाती होते हैं और बिंदु य का बिंदु भ पर संपतन होता है, इस दशा में मय = मभ

$$\therefore \text{ कोज्या}0^\circ = \frac{मभ}{मभ} = १$$

$$\text{स्प}0^\circ = \frac{\text{ज्या}0^\circ}{\text{कोज्या}0^\circ}$$

$$= \frac{०}{१}$$

$$= ०$$

$$\text{व्युज्ज्या}0^\circ = \frac{१}{\text{ज्या}0^\circ}$$

$$= \frac{१}{०}$$

अब किसी परिमित (finite) राशि का हर कोई अत्यन्त छोटी (infinitely small) राशि हो तो लब्धि = एक अनंत राशि।

इस प्रकार की अतिमहान् राशि $\infty$ चिह्न से दर्शाई जाती है।

$$\therefore \text{ व्युज्ज्या } 0^\circ = \infty$$

$$\text{पुनः व्युत्कोज्या}0^\circ = \frac{1}{\text{कोज्या}0^\circ}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

$$\text{और} \quad \text{कोस्प } 0^\circ = \frac{1}{\text{स्प}0^\circ}$$

$$= \frac{1}{0}$$

$$= \infty$$

३·२१ ९०° अथवा $\frac{\text{प्या}}{2}$ की निष्पत्तियां

कोण 0° और ९०° लम्बपूरक हैं।

अतः अनुच्छेद ३·१ और ३·२ से,

$$\text{ज्या } 90^\circ = \text{कोज्या } 0^\circ$$

$$= 1$$

$$\text{कोज्या } 90^\circ = \text{ ज्या } 0^\circ$$

$$= ०$$

$$\text{स्प } ९०^\circ = \frac{\text{ज्या } ९०^\circ}{\text{कोज्या} ९०^\circ}$$

$$= \frac{१}{०}$$

$$= \infty$$

इसलिए, व्युज्ज्या $९०^\circ = १$,

व्युत्कोज्या $९०^\circ = \infty$,

कोस्प $९०^\circ = ०$.

उदाहरण— रैखिकीय विधि से ९०° के कोण की निष्पत्तियां निकालो।

३·२ कोण ४५° अथवा $\frac{\pi}{४}$ की निष्पत्तियां —

आ ३.३

मान लो कि कखग एक लंब-कोण द्विसम त्रिभुज (rt. angled isosceles triangle) है ;

जिसमें $\angle$ ग = ९०°

और $\angle$क = $\angle$ख = ४५°

मान लो, कग = खग = का

$$\text{तो कख} = \sqrt{\text{का}^{२} + \text{का}^{२}}$$

$$= \sqrt{२}\ \text{का}$$

$$\therefore\ \text{ज्या } ४५^\circ = \frac{\text{खग}}{\text{कख}}$$

$$= \frac{\text{का}}{\sqrt{२}\ \text{का}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या } ४५^\circ = \frac{\text{कग}}{\text{कख}}$$

$$= \frac{\text{का}}{\sqrt{२}\ \text{का}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{स्प } ४५^\circ = \frac{\text{ज्या } ४५^\circ}{\text{कोज्या } ४५^\circ}$$

$$= \frac{१/\sqrt{२}}{१/\sqrt{२}}$$

$$= १$$

इसलिए, व्युज्ज्या ४५° = √२,

व्युत्कोज्या ४५° = √२,

और कोस्प ४५° = १

३·४ ६०° अथवा $\frac{\text{प्या}}{३}$ की निष्पत्तियां —

आ. ३.४

मान लो कखग एक समत्रिभुज (equilateral triangle) है,

इसलिए, ∠क = ∠ख = ∠ग = ६०°

ख शीर्ष से कग आधार पर खच लंब खींचो।

मान लो समत्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई २का है।

तो कच = चग = का

लम्बकोण त्रिभुज कचख से,

$$खच = \sqrt{४ का^२ - का^२} = \sqrt{३} का$$

$$\therefore \quad ज्या ६०^\circ = \frac{खच}{कख} = \frac{\sqrt{३} का}{२ का} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$कोज्या ६०^\circ = \frac{कच}{कख} = \frac{का}{२का} = \frac{१}{२}$$

$$स्प ६०^\circ = \frac{ज्या ६०^\circ}{कोज्या ६०^\circ} = \frac{\sqrt{३}/२}{१/२} = \sqrt{३}$$

इसलिए, व्युज्ज्या $६०^\circ = \frac{२}{\sqrt{३}}$,

व्युत्कोज्या $६०^\circ = २$,

तथा कोस्प $६०^\circ = \frac{१}{\sqrt{३}}$

२·५ कोण $३०^\circ$ अथवा $\frac{प्या}{६}$ की निष्पत्तियां —

कोण $३०^\circ$, कोण $६०^\circ$ का लम्ब-पूरक है, अतः अनुच्छेद २·१ और २·४ से,

$$\text{ज्या ३०} = \text{कोज्या ६०} = \frac{१}{२}$$

$$\text{कोज्या ३०} = \text{ज्या ६०} = \frac{\sqrt{3}}{२}$$

$$\text{स्प ३०}^\circ = \frac{\text{ज्या ३०}^\circ}{\text{कोज्या ३०}^\circ} = \frac{१/२}{\sqrt{3}/२} = \frac{१}{\sqrt{3}}$$

इसलिए व्युज्ज्या $३०^\circ = २$,

$$\text{व्युत्कोज्या ३०}^\circ = \frac{२}{\sqrt{३}},$$

और कोस्प $३०^\circ = \sqrt{३}$

उदाहरण— अनुच्छेद ३४ की आकृति से ३०° के कोण की निष्पत्तियां निकालो।

३६ प्रमाप कोणों ०°, ३०°, ४५°, ६०° और ९०° की निष्पत्तियों की आवश्यकता होती है। वे यहां निम्नलिखित सारणी (table) के रूप में दी गई हैं। विद्यार्थियों को चाहिए कि इसे कण्ठस्थ कर लें।

| कोण | ०° | ३०° | ४५° | ६०° | ९०° |
|---|---|---|---|---|---|
| ज्या | ० | $\frac{१}{२}$ | $\frac{१}{\sqrt{२}}$ | $\frac{\sqrt{३}}{२}$ | १ |
| कोटिज्या | १ | $\frac{\sqrt{३}}{२}$ | $\frac{१}{\sqrt{२}}$ | $\frac{१}{२}$ | ० |
| स्पर्शज्या | ० | $\frac{१}{\sqrt{३}}$ | १ | $\sqrt{३}$ | $\infty$ |
| व्युत्क्रमज्या | $\infty$ | २ | $\sqrt{२}$ | $\frac{२}{\sqrt{३}}$ | १ |
| व्युत्क्रम-कोटिज्या | १ | $\frac{२}{\sqrt{३}}$ | $\sqrt{२}$ | २ | $\infty$ |
| कोटिस्पर्शज्या | $\infty$ | $\sqrt{३}$ | १ | $\frac{१}{\sqrt{३}}$ | ० |

३.६१ उदाहरण १— सत्यापन (verify) करो कि

$$ज्या\ ६०° = \frac{२ स्प\ ३०}{१ + स्प^{२}\ ३०°}$$

$$दक्षिण\ पक्ष = \frac{२\cdot\frac{१}{\sqrt{३}}}{१ - \frac{१}{३}}$$

$$= \frac{२}{\sqrt{३}} \times \frac{३}{४} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$= \text{ज्या } ६०^\circ = \text{वाम पक्ष}$$

उदाहरण २— सिद्ध करो कि

$$(\text{कोज्या } ३० + \text{स्प } ६०)^2 + (\text{ज्या } ४५ + \sqrt{२}\ \text{कोज्या } ६०)^2 + (\text{कोस्प } ६० - \text{कोज्या } ३०^\circ)^2 = \frac{५३}{६}$$

$$\text{वाम पक्ष} = \left(\frac{\sqrt{३}}{२} + \sqrt{३}\right)^2 + \left(\frac{१}{\sqrt{२}} + \sqrt{२} \times \frac{१}{२}\right)^2 + \left(\frac{१}{\sqrt{३}} - \frac{\sqrt{३}}{२}\right)^2$$

$$= \left(\frac{३\sqrt{३}}{२}\right)^2 + \left(\frac{२}{\sqrt{२}}\right)^2 + \left(-\frac{१}{२\sqrt{३}}\right)^2$$

$$= \frac{२७}{४} + \frac{४}{२} + \frac{१}{१२}$$

$$= \frac{८१ + २४ + १}{१२}$$

$$= \frac{१०६}{१२}$$

$$= \frac{५३}{६}$$

## प्रश्नावलि ४

(१) सत्यापन करो कि

(अ) $\text{ज्या } ६०^\circ = २\text{ज्या } ३०^\circ \text{ कोज्या } ३०^\circ$

(आ) $\text{कोज्या } ९०^\circ = \text{कोज्या}^२ ४५^\circ - \text{ज्या}^२ ४५^\circ$

$= २ \text{ कोज्या}^२ ४५^\circ - १$

$= १ - २\text{ज्या}^२ ४५^\circ$

(इ) $\text{ज्या } ३०^\circ = \sqrt{\frac{१ - \text{कोज्या } ६०}{२}}$

(ई) $\text{कोज्या } ३०^\circ = \sqrt{\frac{१ + \text{कोज्या } ६०^\circ}{२}}$

* (२) सत्यापन करो कि

(अ) $\text{ज्या } १३५^\circ = ३ \text{ ज्या } ४५^\circ - ४ \text{ ज्या}^३ ४५^\circ$

(आ) $\text{कोज्या } १३५^\circ = ४ \text{ कोज्या}^३ ४५^\circ - ३ \text{ कोज्या } ४५^\circ$

(इ) $\text{स्प } १२०^\circ = \frac{४ \text{ स्प } ३०^\circ - ४ \text{ स्प}^३ ३०^\circ}{१ - ६\text{स्प}^२ ३०^\circ + \text{स्प}^४ ३०}$

(ई) $\text{कोज्या } १२०^\circ = - \frac{१ - \text{स्प}^२ ६०^\circ}{१ + \text{स्प}^२ ६०^\circ}$

---

टिप्पणी— विद्यार्थियों को चाहिए कि पांचवें अध्याय को पढ़ लेने के पश्चात् दूसरे उदाहरण को करें।

(३) सिद्ध करो कि

$$(\text{व्युकोज्या}^2 ४५ + \text{व्युज्या}^2 ६०^\circ + \text{कोस्प}^2 ३०^\circ)$$

$$= ४ (\text{कोज्या}^2 ४५^\circ + \text{ज्या}^2 ६०^\circ + \text{स्प}^2 ३०^\circ) = ६\tfrac{१}{३}$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\text{व्युकोज्या } ३०^\circ \text{ स्प } ६०^\circ + \text{ज्या } ४५^\circ \text{ व्युज्या } ४५ + \text{कोज्या } ३० \text{ कोस्प } ६० = \frac{७}{२}$$

२.७ सीमा (limit) की कल्पना—

मान लो $\frac{\text{क}}{\text{य}}$ एक भिन्न (fraction) है जिसमें अंश क की अहाँ स्थिर है और हर य की अहाँ विचरणशील (variable, or capable of variation) है।

उदाहरणार्थ, $\frac{\text{क}}{\frac{१}{१०}} = १०\text{क}$,

$$\frac{\text{क}}{\frac{१}{१०००}} = १०००\text{क} \text{ इत्यादि।}$$

स्पष्ट है कि जैसे-जैसे हर य की अहाँ कम होती जाती है, वैसे वैसे भिन्न $\frac{\text{क}}{\text{य}}$ की अहाँ बढ़ती जाती है। हर य

की अर्हा पर्याप्त कम करने पर, भिन्न $\frac{क}{य}$ की अर्हा इच्छानुसार बढ़ाई जा सकती है।

अर्थात्, जैसे-जैसे य की अर्हा शून्य की ओर पहुंचती है, वैसे-वैसे भिन्न $\frac{क}{य}$ की अर्हा अनंती की ओर प्रवृत्त होती है (tends towards infinity)।

जब न्यून होते-होते य शून्यसम हो जाता है तो $\frac{क}{य}$ की अर्हा की सीमा अनंत होती है।

अथवा संक्षेप में,

$$\lim_{य \to 0} \left(\frac{क}{य}\right) = \infty$$

पुनः, यदि राशि य संतत (continuously) बढ़ती जाय और अन्त में अनंत हो जाय तो भिन्न $\frac{क}{य}$ की अर्हा अत्यंत छोटी (infinitesimally small) हो जाती है।

अर्थात् $\lim_{य \to \infty} \left(\frac{क}{य}\right) = 0$

$$= \frac{अ}{२ प्या}$$

∴ शकल कमख का क्षेत्रफल

$$= \frac{अ}{२ प्या} \quad \text{(वृत्त का क्षेत्रफल)}$$

$$= \frac{अ}{२ प्या} \times प्या त्र^{२}$$

$$= \frac{१}{२} अ त्र^{२}$$

३·२ यदि $० < अ < \frac{प्या}{२}$, जहां अ आरीय माप में है तो ज्या अ $<$ अ $<$ स्प अ।

मान लो म केन्द्र और त्र त्रिज्या वाले वृत्त का कमख एक शकल है, और $\angle कमख = अ^{आ}$

मक, मख और कख को मिलाओ। बिंदु ख पर वृत्त की स्पर्श-रेखा खस खींचो जो वर्धित (produced) रेखा मक से बिंदु स पर मिले तो, △ कमख का क्षेत्रफल,

$$= \frac{१}{२} मक.(ख \text{ से } मक \text{ पर लंब})$$

$$= \frac{१}{२} मक. मख ज्या अ$$

$\left(\because \frac{\text{खस}}{\text{मख}} = \frac{\text{खस}}{\text{त्र}} = \text{स्प अ}\right)$

$= \frac{१}{२}$ त्र$^२$स्पअ

आकृति से यह स्पष्ट है कि △ कमख पूर्ण रूप से, शकल कमख के अन्तर्गत है और शकल कमख पूर्ण रूप से, △ खमस के अंतर्गत है।

इसलिए, △ कमख < शकल कमख < △ मखस

अर्थात् $\frac{१}{२}$ त्र$^२$ज्या अ $< \frac{१}{२}$ त्र$^२$ अ $< \frac{१}{२}$ त्र$^२$स्प अ

अथवा आदि से अन्ततक $\frac{१}{२}$ त्र$^२$ से भाग देने पर

ज्या अ < अ < स्प अ

३.९१ यदि अ शून्य की ओर प्रवृत्त हो तो $\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}}$ और $\frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}}$ दोनों राशिया सीमा में १ के सम होती हैं।

पिछले अनुच्छेद से,

ज्या अ < अ < स्प अ . ................(१)

आदिसे अततक ज्याअ से भाग देने पर,

$१ < \frac{\text{अ}}{\text{ज्या अ}} < \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$

अथवा, $१ < \frac{अ}{ज्या\ अ} <$ व्युत्कोज्या अ  (२)

जब अ की अर्हा अत्यंत छोटी हो जाती है तब व्युत्कोज्या अ की अर्हा १ हो जाती है।

इसलिए, सम्बन्ध (२) से, $\frac{ज्या\ अ}{अ}$ की सीमा १ है।

इसी प्रकार (१) को आदिमे अन्ततक स्प अ से भाग देने पर,

$$कोज्या\ अ < \frac{अ}{स्प\ अ} < १ \ldots \quad \ldots (३)$$

परन्तु जब अ की अर्हा अत्यंत छोटी हो जाती है तब कोज्या अ की अर्हा १ हो जाती है।

इसलिए सम्बंध (३) से $\frac{अ}{स्प\ अ}$ अथवा $\frac{स्प\ अ}{अ}$ की सीमा १ होती है।

ये फल (result) प्राय: इस रूप में लिखे जाते हैं।

$$सी_{अ \to 0} \left(\frac{ज्याअ}{अ}\right) = १,$$

$$सी_{अ \to 0} \left(\frac{स्पअ}{अ}\right) = १$$

३·९२ उदाहरण १— यदि किसी कोण का आरीय नाप अ हो तो दिखाओ कि

$$\text{सी}_{\text{स} \to \infty} \left[ \text{स}\cdot\text{ज्या}\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right) \right] = \text{अ}$$

$$\text{अब स. ज्या } \left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right) = \text{अ}\cdot\frac{\text{ज्या}\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)}{\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)}$$

$$\therefore \text{सी}_{\text{स} \to \infty} \left[ \text{स ज्या}\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right) \right] = \text{अ. सी}_{\text{स} \to \infty} \frac{\text{ज्या}\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)}{\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)}$$

$$= \text{अ.सी}_{\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right) \to 0} \frac{\text{ज्या}\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)}{\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)}$$

$$= \text{अ. १} = \text{अ}$$

उदाहरण २— ज्या ३०′ की एक उपसन्न (approximate) अर्हा निश्चित करो।

$$३०' = \left(\frac{१}{२}\right) = \left(\frac{\text{प्या}}{१८० \times २}\right)^{\text{आ}}$$

$$\therefore \quad \text{ज्या}३०' = \text{ज्या}\left(\frac{\text{प्या}}{३६०}\right)$$

$$= \frac{\text{प्या}}{३६०} \text{ लगभग}$$

$$= \frac{३.१४१५९}{३६०}$$

$$= .००८७२६६ \text{ लगभग}$$

## प्रश्नावलि ५

इन कोणों की उपलब्ध अर्घाएं निकालो—

(१) कोज्या २०' (२) ज्या २०'

(३) व्युज्ज्या १०" (४) व्युत्कोज्या १'

(५) कोस्प ८९°

नीचे दिए समीकरणों का स्थूल रूप से साधन करो।

(६) स्प अ = ·०१ (७) ज्या अ = ·००२

(८) यदि अ आरीय माप में हो तो सिद्ध करो कि,

$$\lim_{\text{स} \to \infty} \left[\text{स}\cdot\text{स्प}\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)\right] = \text{अ}$$

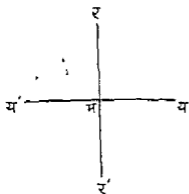
(९) किसी विन्दु से १ क्रोशक (mile) की दूरी पर स्थित ६ पाद ऊंचे बांस द्वारा दत्त विन्दु पर आपातित कोण का निश्चय करो।

(१०) यदि किसी विन्दु से ८८० यष्टि (yards) की दूरी पर स्थित एक बांस दत्त विन्दु पर २०′ का कोण आपातित करता हो, तो बांस की ऊंचाई क्या है ?

# चौथा अध्याय

## त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के विचरण (variations)

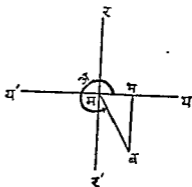
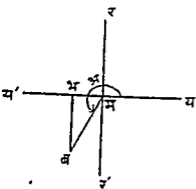
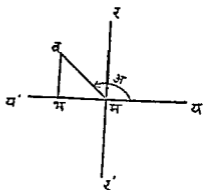
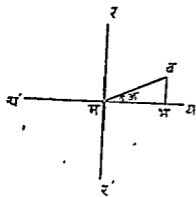
४·१ धन और ऋण रेखाएं—

पहले अध्याय में यह बतलाया जा चुका है कि कोण किस प्रकार धन अथवा ऋण हो सकते हैं। अब यह देखा जायगा कि एक समतल में रेखाओं की दिशा किस प्रकार धन अथवा ऋण हो सकती है।

आ. ४.१

मान लो कि यमय' और रमर' दो परस्पर लंब सरल रेखाएं एक दूसरे को म बिंदुपर काटती हैं।

तो रूढ़ि के अनुसार रर' के दक्षिण पक्ष की ओर यय' की समान्तर सरल रेखाएं धन, और रर' के वाम पक्ष की ओर यय' की समान्तर सरल रेखाएं ऋण मानी जाती हैं।

इसी प्रकार र'र की समान्तर और यय' के ऊपर की सरल रेखाएं धन, और रर' की समान्तर और यय' के नीचे की सरल रेखाएं ऋण मानी जाती हैं।

४.२ किसी भी कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां—दूसरे अध्याय में न्यूनकोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की

आ. ४.१

परिभाषा दी गई है। अब किसी भी कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की परिभाषा दी जायगी।

मान लो कि परस्पर लंब रेखाएं यय', रर' एक दूसरे का म बिंदु पर छेदन करती हैं। इस प्रकार पत्र का सम्पूर्ण समतल चार चरणों में विभाजित हो जाता है।

मान लो निश्चित आयाम की सदिश त्रिज्या मव, स्थिति मय से प्रतिघड़ीवत् परिभ्रमण आरम्भ कर, धन कोण यमव (=अ) का अनुरेखण करती है। जैसा कि आकृतियों में प्रदर्शित किया गया है रेखा मव, चार चरणों में से किसी भी चरण में हो सकती है। व बिंदु से रेखा यय' पर वभ लम्ब खींचो। कोण अ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां ये होंगी—

$$\text{ज्या अ} = \frac{\text{भव}}{\text{मव}}, \quad \text{व्युज्ज्याअ} = \frac{\text{मव}}{\text{भव}}$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}}, \quad \text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{\text{मव}}{\text{मभ}}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{भव}}{\text{मभ}}, \quad \text{कोस्प अ} = \frac{\text{मभ}}{\text{भव}}$$

ऊपर दी हुई परिभाषाओं में रेखाओं के चिह्नों पर उचित ध्यान देने की आवश्यकता है। सदिश त्रिज्या सदा धन मानी जाती है।

४·२१ कोण यमव (= अ) की अर्हा चाहे कुछ भी हो, अनुच्छेद २·५ की भांति, यहां भी यह दिखाया जा सकता है कि,

$$ज्या^2 अ + कोज्या^2 अ = 1$$

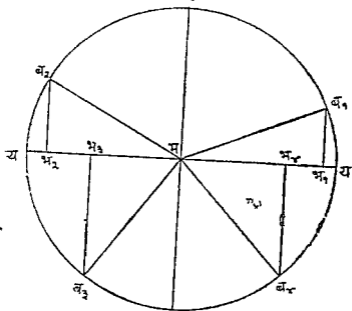
$$व्युत्कोज्या^2 अ = 1 + स्प^2 अ$$

$$व्युज्ज्या^2 अ = 1 + कोस्प^2 अ$$

$$स्प\ अ = \frac{ज्या\ अ}{कोज्या\ अ}$$

$$और\ व\ कोस्प\ अ = \frac{कोज्या\ अ}{ज्या\ अ}$$

४ ३ त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के चिह्न-

आ. ४ २

म बिंदु को केन्द्र मानकर किसी निश्चित त्रिज्या का एक वृत्त खींचो। व्यास यय' और रर' वृत्त को चार चरणों में विभाजित करते हैं। मान लो कि मव$_1$, मव$_2$, मव$_3$ और मव$_4$ चार चरणों में सदिश त्रिज्या की स्थितियां हैं। व$_1$भ$_1$, व$_2$भ$_2$, व$_3$भ$_3$ और व$_4$भ$_4$ रेखा यय' पर लम्ब खींचो।

प्रथम चरण यमर में भ$_1$व$_1$ और मभ$_1$ दोनों रेखाएं धन हैं; अतः इस चरण के किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां धन होंगी।

द्वितीय चरण य'मर में भ$_2$व$_2$ धन है परन्तु मभ$_2$ ऋण है। इसलिए ज्या $\angle$व$_2$मभ$_2$, भ$_2$व$_2$ और मव$_2$, दो धन राशियों की निष्पत्ति होने के कारण धन है; परन्तु कोटिज्या $\angle$व$_2$मभ$_2$ ऋण राशि मभ$_2$ और धन राशि मव$_2$ की निष्पत्ति होने के कारण ऋण है। इसी प्रकार स्पर्शज्या $\angle$व$_2$मभ$_2$ भी धन राशि भ$_2$व$_2$ और ऋण राशि मभ$_2$ की निष्पत्ति होने के कारण ऋण है।

तृतीय चरण य'मर' में भ$_3$व$_3$ और मभ$_3$ दोनों रेखाएं ऋण हैं; अतः ज्या $\angle$व$_3$मभ$_3$ और कोटिज्या $\angle$व$_3$ मभ$_3$ ऋण हैं परन्तु स्पर्शज्या $\angle$व$_3$मभ$_3$ धन है।

चतुर्थ चरण र'मय में भ$_4$व$_4$ ऋण और मभ$_4$ धन है; अतः ज्या $\angle$व$_4$मभ$_4$ ऋण, कोटिज्या $\angle$व$_4$मभ$_4$ धन और स्पर्शज्या $\angle$व$_4$मभ$_4$ ऋण हैं।

क्योंकि किसी कोण की व्युत्क्रमज्या, उस कोण की ज्या का व्युत्क्रम है अतः किसी भी चरण में कोण की व्युत्क्रमज्या का चिह्न उस कोण की ज्या के चिह्न के समान होगा। इसी प्रकार किसी भी चरण में कोण की व्युत्क्रमकोटिज्या

और कोटिज्या के चिह्न तथा स्पर्शज्या और कोटिस्पर्शज्या के चिह्न सदा एक होते हैं। इसलिए यदि किसी कोण की तीन मुख्य त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के चिह्न ज्ञात हों तो उसकी शेष निष्पत्तियों के चिह्न भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

अतः यह सारणी स्मरण रखनी चाहिए—

४·४ अब, कोण अ का शून्य से २ π तक संतत विचरण होने पर, ज्या अ की अर्हा के विचरणों का अनुरेखण किया जायगा।

मान लो पिछले अनुच्छेद की आकृति में वृत्त की त्रिज्या त्र है।

प्रथम चरणः— ज्या अ = $\frac{\text{भ}_१\text{य}_१}{\text{त्र}}$

जैसे-जैसे कोण अ शून्य से $\frac{\pi}{२}$ तक बढ़ता है, वैसे-वैसे $\text{भ}_१\text{य}_१$

पहुंचती है और उसके द्वारा अनुरेखित कोण अ २ π के सम होता है। इस परिभ्रमण के आरम्भ से अन्त तक, कोण अ की ज्या की अर्हाओं के परिवर्तनों पर गतानुच्छेद में विचार किया गया है। अब यदि सदिश त्रिज्या पुनः एक पूर्ण प्रतिघटीवत् परिभ्रमण करे तो कोण अ की अर्हा २ π से ४ π तक बढ़ जाती है और प्रथम परिभ्रमण में ज्या अ की अर्हाओं में जो परिवर्तन हुए थे उनका उसी क्रम (order) में पुनरावर्तन होता है। इसके अतिरिक्त यदि किन्हीं भी दो कोणों का अन्तर ४ लंब कोण अथवा २ π यार हो, तो उन कोणों के लिए सदिश त्रिज्या की स्थिती एक ही होती है: अतः उन कोणों की ज्या भी एक ही होती है। इसलिए यह स्पष्ट है कि ज्या एक आवर्तीय श्रित है और उसका आवर्त-काल (period) २ π है। इसी प्रकार सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां आवर्तीय श्रित हैं और स्पर्शज्या और कोटिस्पर्शज्या के अतिरिक्त सब का आवर्त काल २ π है।

स्पर्शज्या और कोटिस्पर्शज्या की अर्हाओं में, परिभ्रमण-रेखा के प्रत्येक अर्ध परिभ्रमण के पश्चात् पुनरावर्तन होता है। अतः स्पर्शज्या और कोटिस्पर्शज्या का आवर्त-काल π है।

४·६ ज्या-बिंदुरेख (sine graph) अथवा समीकार र=ज्या य का बिंदुरेख

मान लो कि परस्पर लंब सरल रेखाएं मय और मर बिंदु म पर मिथश्छेदन करती हैं। रेखा मय पर य और रेखा मर पर ज्या य की संवादी अर्हाओं का मापन करो। य की कुछ उपयुक्त अर्हाएं उदाहरणार्थ ०, $\frac{\pi}{४}$, $\frac{\pi}{३}$, इत्यादि लेकर ज्या

संतत शून्य से त्र तक बढ़ता है। अतः ज्या अ की यहाँ संतत ० से १ तक बढ़ती है।

द्वितीय चरणः— ज्या अ = $\frac{भ_2 य_2}{त्र}$

जैसे-जैसे कोण अ, $\frac{प्या}{2}$ से प्या तक बढ़ता है वैसे-वैसे $भ_2 य_2$

संतत त्र से शून्य तक घटता है। अतः ज्या अ की यहाँ संतत १ से शून्य तक घटती है।

तृतीय चरणः— ज्या अ = $\frac{भ_3 य_3}{त्र}$

जैसे-जैसे कोण अ, प्या से $\frac{3 प्या}{2}$ तक बढ़ता है, वैसे-वैसे $भ_3 य_3$

संतत शून्य से − त्र तक घटता है। अतः ज्या अ की यहाँ संतत शून्य से −१ तक घटती है।

चतुर्थ चरणः— ज्या अ = $\frac{भ_4 य_4}{त्र}$

जैसे-जैसे कोण अ $\frac{3 प्या}{2}$ से २ प्या तक बढ़ता है, वैसे-वैसे

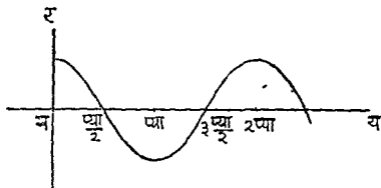
$भ_4 य_4$ संतत − त्र से शून्य तक बढ़ता है। अतः ज्या अ की यहाँ संतत −१ से शून्य तक बढ़ती है।

४·५ आवर्तीय श्रित (periodic functions)—

स्थिति मय से आरम्भ कर एक पूर्ण प्रतिघडीवत् परिभ्रमण करने के पश्चात् सदिश त्रिज्या पुनः स्थिति मय पर आ

यह वक्र ज्या – विन्दुरेख अथवा समीकार र = ज्या य का विन्दुरेख कहलाता है।

य और ज्या य की उपयुक्त अर्हाएं लेने से इस वक्र को मय के ऋण पार्श्व (side) पर भी बढ़ा सकते हैं।

४.७ इसी प्रकार, कोण अ के संतत, शून्य से २ प्या तक विचरण करने पर कोज्या अ की अर्हाओं के विचरण का अनुरेखण करो और समीकार र = कोज्या य का विन्दुरेख खींचो।

आ. ४.४

अपेक्षित विन्दु-रेख दी हुई आकृति के समान होगा।

४.८ अब कोण अ के शून्य से २ प्या तक संतत विचरण करने पर स्प अ की अर्हा के विचरण का अनुरेखण

य की संवादी अर्हाएं निकालो।

| य | ० | $\frac{प्या}{२}$ | प्या | $\frac{३प्या}{२}$ | २प्या | $\frac{५प्या}{२}$ | ३प्या |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ज्या य | ० | १ | ० | −१ | ० | १ | ० |

ये साथ में दी हुई सारणी में भी दी गई हैं।

य के लिये $\frac{प्या}{२}$ आर = २ शतिमान

और र अथवा ज्या अ के लिए १ = १ शतिमान इस अनुमाप (scale) पर, य और ज्या य की संवादी अर्हाओं क निरूपण करने वाले विन्दुओं का अंकन करो।

यह देखा जायगा कि ये सब विन्दु एक संतत (continuous) वक्र (curve) पर हैं।

आ. ४.३

जैसे-जैसे कोण अ शून्य से $\frac{\text{प्या}}{२}$ तक संतत बढ़ता है $\text{भ}_१\text{व}_१$ संतत बढ़ता है और $\text{मभ}_१$ संतत घटता है।

इसलिए $\frac{\text{भ}_१\text{व}_१}{\text{मभ}_१}$ अर्थात् स्प अ संतत बढ़ता है।

जब अ $= \frac{\text{प्या}}{२}$, तो $\text{भ}_१\text{व}_१ = \text{त्र}$ और $\text{मभ}_१ = ०$

$$\therefore \quad \text{स्प} \frac{\text{प्या}}{२} = \infty$$

इसलिए प्रथम चरण में स्प अ शून्य से $+\infty$ तक संतत बढ़ता है।

द्वितीय चरणः— द्वितीय चरण में, कोण अ जैसे-जैसे $\frac{\text{प्या}}{२}$ से प्या तक बढ़ता है वैसे-वैसे $\text{भ}_२\text{व}_२$ त्र से शून्य तक घटता है और $\text{मभ}_२$ ऋण रहते हुए संख्यात्मक रूप से (numerically) शून्य से त्र तक बढ़ता जाता है।

$$\text{अब स्प अ} = \frac{\text{भ}_२\text{व}_२}{\text{मभ}_२}$$

$\therefore$ जब अ $= \frac{\text{प्या}}{२} +$ उपेक्षणीय अल्प कोण

$$\text{तब स्प अ} = \frac{\text{त्र}}{-०} = -\infty$$

और जब अ $=$ प्या, स्प अ $= \frac{०}{-\text{त्र}} = ०$

किया जायगा।

आ. ४. ५

प्रथम चरणः—$\text{स्प अ} = \frac{\text{भ}_1\text{ब}_1}{\text{मभ}_1}$

जब $\text{अ} = 0$, तो $\text{भ}_1\text{ब}_1 = 0$

और $\text{मभ}_1 = \text{त्र}$

$\therefore \quad \text{स्प } 0 = \frac{0}{\text{त्र}} = 0$

जैसे-जैसे कोण अ शून्य से $\frac{\text{प्या}}{२}$ तक संतत बढ़ता है $भ_१ब_१$ संतत बढ़ता है और $मभ_१$ संतत घटता है।

इसलिए $\frac{भ_१ब_१}{मभ_१}$ अर्थात् स्प अ संतत बढ़ता है।

जब अ = $\frac{\text{प्या}}{२}$, तो $भ_१ब_१$ = त्र और $मभ_१$ = ०

$\therefore$ स्प $\frac{\text{प्या}}{२} = \infty$

इसलिए प्रथम चरण में स्प अ शून्य से + ∞ तक संतत बढ़ता है।

द्वितीय चरणः— द्वितीय चरण में, कोण अ जैसे-जैसे $\frac{\text{प्या}}{२}$ से प्या तक बढ़ता है वैसे-वैसे $भ_२ब_२$ त्र से शून्य तक घटता है और $मभ_२$ ऋण रहते हुए संख्यात्मक रूप से (numerically) शून्य से त्र तक बढ़ता जाता है।

अब स्प अ = $\frac{भ_२ब_२}{मभ_२}$

$\therefore$ जब अ = $\frac{\text{प्या}}{२}$ + उपेक्षणीय अल्प कोण

तब स्प अ = $\frac{-\text{त्र}}{२} = -\infty$

और जब अ = प्या, स्प अ = $\frac{०}{-\text{त्र}}$ = ०

इसलिए स्प अ बीजीय विधि से (algebraically) $-\infty$ से शून्य तक बढ़ता है।

अतः, अ के $\frac{\text{व्या}}{२}$ अर्हा प्राप्त करने के ठीक पूर्व ही स्प अ की अर्हा धन और बहुत बड़ी होती है, और अ के $\frac{\text{व्या}}{२}$ अर्हा प्राप्त करने के ठीक पश्चात ही स्प अ की अर्हा ऋण और बहुत बड़ी होती है।

इसप्रकार जब अ की अर्हा प्रथम चरण से द्वितीय चरण में प्रवेश करती हुई, $\frac{\text{व्या}}{२}$ के सम होती है तब स्प अ की अर्हा में एक खण्ड (break) आ जाता है।

तृतीय चरणः— तृतीय चरण में $\text{भ}_३\text{ब}_३$ और $\text{मभ}_३$ दोनों ऋण होते हैं, $\text{भ}_३\text{ब}_३$ संख्यात्मक रूप से शून्य से त्र तक बढ़ता है। और $\text{मभ}_३$ संख्यात्मक रूप से त्र से शून्य तक घटता है।

इसलिए स्प अ $= \frac{\text{भ}_३\text{ब}_३}{\text{मभ}_३}$ धन रहते हुए शून्य से $\infty$ तक बढ़ता है।

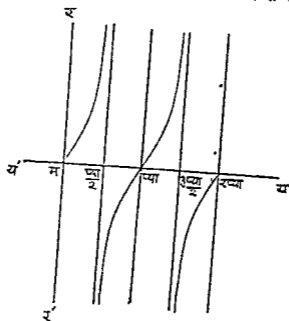
चतुर्थ चरणः— चतुर्थ चरण में $\text{भ}_४\text{ब}_४$ ऋण है और संख्यात्मक रूप से त्र से शून्य तक घटता है, और $\text{मभ}_४$ धन रहते हुए शून्य से त्र तक बढ़ता है।

इसलिए स्प अ $= \frac{\text{भ}_४\text{ब}_४}{\text{मभ}_४}$ बीजीय विधि से $-\infty$ से शून्य तक बढ़ता है।

४.८१ स्पर्शज्या विन्दुरेख अथवा समीकार र=स्प य का विन्दुरेख—

| य | ० | $\frac{\text{प्या}}{२}$ −० | $\frac{\text{प्या}}{२}$ +० | प्या | $\frac{\text{३प्या}}{२}$ −० | $\frac{\text{३प्या}}{२}$ +० | २प्या |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| स्प य | ० | ∞ | −∞ | ० | ∞ | −∞ | ० |

कोण य का शून्य से २ प्या तक विचरण होने पर, स्प य की संवादी अर्हाएं सारणी में दी गई हैं।

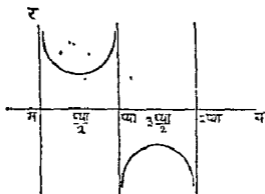
सारणी से यह स्पष्ट है कि कोण य के प्या से २ प्या तक

आ. ४.६

विचरण करने पर स्प य की जो अर्हाएं प्राप्त होती हैं वे क्रमशः, कोण य के शून्य से प्या तक विचरण में, स्प य की अर्हाओं के सम हैं। इससे यह ज्ञात होता है कि स्प य का आवर्तकाल प्या है।

कोण य की महत्ताएं मय रेखा पर, स्प य की घन अर्हाएं मर पर और ऋण अर्हाएं मर' पर निरूपित की गई हैं।

स्प य की अर्हाओं का निरूपण करने वाले बिंदुओं को अंकन करो। उन बिंदुओं को मिलाने वाला वक्र खींचने से समीकार र=स्प य का बिंदुरेख प्राप्त होता है। यह आकृति में दिखाया गया है। इसे य की २प्या से बड़ी (greater) अर्हाओं के लिए और य की ऋण अर्हाओं के लिये भी बढ़ा सकते हैं।

४.९ व्युत्क्रमज्या-बिंदुरेख (cosecant graph)

आ. ४.७.

कोण य के शून्य से २π्या तक विचरण के लिये समी-
कार र=व्युज्या य का विंदुरेख आकृति में दर्शाया गया है।

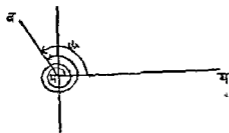
## उदाहरण

कोण अ के शून्य से २π्या तक विचरण करने पर, व्युत्कोज्या अ और कोस्प अ के विचरणों का अनुरेखण करो और

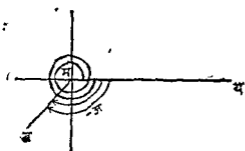
(१) र= व्युत्कोज्या य और (२) र= कोस्प य के विंदुरेख अनुरेखित करो।

## पांचवां अध्याय

### किसी भी महत्ता के कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां

५.१ कोण (३६०° स ± अ) अथवा (२ सप्या ± अ) की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को (जहां स शून्य, अथवा धन अथवा ऋण पूर्णांक हो) अ की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना।

आ. ५.१

यह स्पष्ट है कि यदि दो कोणों का अन्तर ३६०° अथवा २प्या का पूर्ण अपवर्त्य (multiple) हो अर्थात् यदि यह अन्तर परिभ्रमण-रेखा के, धन अथवा ऋण दिशा में एक अथवा अनेक पूर्ण परिभ्रमण से अनुरेखित किया जा सके तो दोनों कोणों के लिए परिभ्रमणरेखा की अंतिम स्थितियां संपाती होती हैं। इसलिए ऐसे दो कोणों की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां महत्ता में और साथ ही चिह्न में भी समान होती हैं।

इस प्रकार कोण (३६०° स + अ) की निष्पत्तियां कोण अ की निष्पत्तियों के समान और कोण (३६०° स − अ) की

आ. ५.२

निष्पत्तियां कोण (−अ) की निष्पत्तियों के समान होती हैं।

उपप्रमेयः— ३६०° और ०° की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां एक सी होती हैं।

५.२ अ की अहाँ चाहे कुछ भी हो, कोण (−अ) की निष्पत्तियां कोण अ की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना।

मान लो परिभ्रमणरेखा मय स्थिति से प्रारम्भ हो, महत्ता में अ के सम यमव कोण धन दिशा में और यमव′ कोण ऋण दिशा में अनुरेखित करती है।

अर्थात्, ∠यमव = अ

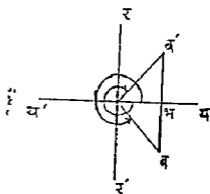
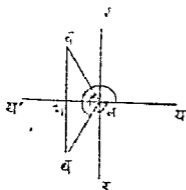
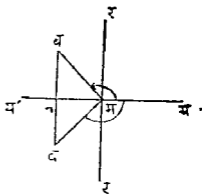
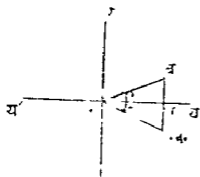
∠यमव′ = −अ

मव रेखा पर के किसी विन्दु व से मय अथवा मय′ पर वभ लंब खींचो और वभ को इस प्रकार बढ़ाओ कि वह मव′ से विन्दु व′ पर मिले।

मव (और मव′) की चार चरणों में से प्रत्येक में, स्थिति के अनुसार चार आकृतियां दी गई हैं।

चि. ५.१

लंब कोण त्रिभुजों बभम और ब'भम में रेखा मभ साधारण है

और ∠भमब = ∠भमब'

∴ ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम (congruent) हैं।

अतः चारों आकृतियों में से प्रत्येक में, रेखाओं के चिह्नों का उचित ध्यान रखते हुए, $मव' = मव$ और $भव' = -भव$

परिभाषानुसार,

$$ज्या(-अ) = \frac{भव'}{मव'} = \frac{-भव}{मव} = -ज्या\ अ$$

$$कोज्या\ (-अ) = \frac{मभ}{मव'} = \frac{मभ}{मव} = कोज्या\ अ$$

$$\therefore\quad स्प\ (-अ) = \frac{ज्या\ (-अ)}{कोज्या\ (-अ)} = \frac{-ज्या\ अ}{कोज्या\ अ} = -स्प\ अ$$

$$और\ व्युज्ज्या\ (-अ) = -व्युज्ज्या\ अ$$

$$व्युत्कोज्या\ (-अ) = व्युत्कोज्या\ अ$$

$$कोस्प\ (-अ) = -कोस्प\ अ$$

उदाहरण— $ज्या\ (-४५^\circ) = -ज्या\ ४५^\circ = -\frac{१}{\sqrt{२}}$

$$स्प\ (३६०^\circ - ३०^\circ) = स्प\ (-३०^\circ) = -स्प\ ३०^\circ = -\frac{१}{\sqrt{३}}$$

$$कोज्या\ (-६०^\circ) = कोज्या\ ६०^\circ = \frac{१}{२}$$

५.३ श्रित की परिभाषा—

प्रत्येक पदसंहति (expression) चल (variable) और अचल राशियों से बनती है। चल राशि की भिन्न-भिन्न अर्हाओं के अनुसार पदसंहति की अर्हा में भी परिवर्तन होता है। यदि किसी पद संहति में चल राशि य निहित हो तो उसकी अर्हा य की अर्हा पर निर्भर रहती है और इस पद-संहति को य का श्रित कहते हैं। इसे श्रि (य) इस प्रकार लिखते हैं।

यदि श्रि (य) में य के स्थान में −य लिखने से उसकी महत्ता और चिह्न में कोई परिवर्तन न हो तो उसे य का सम श्रित कहते हैं। यदि श्रि (य) सम श्रित हो, तो

श्रि (−य) = श्रि (य)

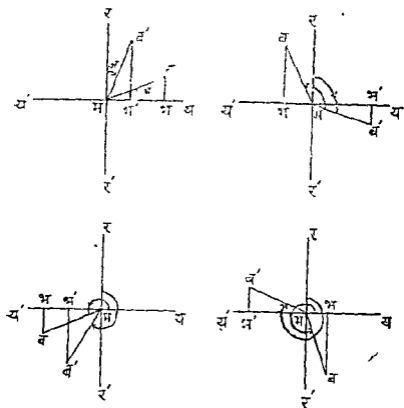
यदि श्रि (य) में य के स्थान में −य लिखने से उसकी महत्ता पहले के समान रहे परन्तु उसके चिह्न में परिवर्तन हो तो उस य का विषम (odd) श्रित कहते हैं।

यदि श्रि (य) विषम श्रित हो तो

श्रि (−य) = − श्रि (य)

गतानुच्छेद से यह ज्ञात होगा कि कोज्या य और व्युत्क्रोज्या य, य के समश्रित है; तथा ज्या य, व्युज्ज्या य, स्प य और कोस्प य, य के विषम श्रित हैं।

५.४ अ की कोई भी अर्हा होने पर कोण (९०° − अ) अथवा $\left(\frac{\text{प्या}}{२} - \text{अ}\right)$ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को

कोण अ की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना।

आ. ५.४

मान लो एक परिभ्रमण रेखा मव, अ के सम ∠यमव का अनुरेखण करती है और एक दूसरी परिभ्रमण रेखा मव',

स्थिति मय से प्रारम्भ हो ∠यमर=९० प्रतिघटीवत् अनुरेखित करती है और इसके पश्चात् विरुद्ध दिशा में घूमकर ∠रमय' = अ घटीवत् अनुरेखित करती है। इस प्रकार ∠यमर' = ९०° − अ

मय और मर पर क्रमशः र और र' म से समान दूरी पर लो और मय अथवा मय पर लम्ब यभ और य भ' खींचो।

∠यमर और ∠रमर' की महत्ताएं समान होने के कारण,

∠भमय = ∠मय'भ

और, मर = मय'

दोनों लम्ब कोण त्रिभुज यमभ और मरभ सर्वांग सम हैं।

दोनों त्रिभुजों की संवादी भुजाएं सम आयाम की हैं। चिह्नों का ध्यान रखते हुए, आकृतियों से,

भय = मभ, मभ = भय, मय' = मय

इसलिए परिभाषानुसार,

$$ज्या(९०° − अ) = ज्या∠यमर' = \frac{भ'र'}{मर} = \frac{मभ}{मय} = कोज्या\ अ$$

$$कोज्या\ (९०° − अ) = कोज्या∠यमय' = \frac{मभ'}{मय} = \frac{भय}{मय} = ज्या\ अ$$

$$स्प(९०° − अ) = \frac{ज्या(९०° − अ)}{कोज्या\ (९०° − अ)} = \frac{कोज्या\ अ}{ज्या\ अ} = कोस्प\ अ$$

इसी प्रकार व्युज्ज्या (९० − अ) = व्युत्कोज्या अ,

व्युत्कोज्या (९० − अ) = व्युज्ज्या अ,

$$\text{कोस्प } (९०^\circ - \text{अ}) = \text{स्प अ}$$

५.५ अ की कोई भी अर्हा होनेपर कोण (९०°+अ) अथवा $\left(\frac{\text{त्या}}{२} + \text{अ}\right)$ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को कोण अ की निष्पत्तियों के पदों में निश्चय करना।

आ. ५ ५

मान लो परिभ्रमण-रेखा मव, मय स्थिति से प्रारम्भ कर अ के सम धन कोण यमव का अनुरेखण करती है और तत्पश्चात् उसी दिशा में अर्थात् प्रतिघटीवत् घूमती हुई एक और लंब कोण बनाती है और इस प्रकार स्थिति मव' पर आ पहुंचती है तो $\angle$यमव $=९०^\circ+$अ

मव और मव' सम आयाम के लो और बिन्दु व और व' से मय पर लंब वभ और व'भ' खींचो।

त्रिभुज मभव और मभ'व' सर्वांगसम हैं। अतः उनकी संवादी भुजाएं समान हैं। अतः चारों आकृतियों का ध्यान रखते हुए,

$$\text{भ}'\text{व}' = \text{मभ},\ \text{भ}'\text{व}' = \text{मभ},\ \text{और मभ}' = -\text{भव}$$

$$\therefore \text{ज्या } (९०^\circ+\text{अ}) = \frac{\text{भ}'\text{व}'}{\text{मव}'} = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}} = \text{कोज्या अ}$$

$$\text{कोज्या } (९०^\circ+\text{अ}) = \frac{\text{मभ}'}{\text{मव}'} = \frac{-\text{भव}}{\text{मव}} = -\text{ ज्या अ}$$

$$\therefore \text{ स्प } (९०^\circ+\text{अ}) = \frac{\text{ज्या}(९०^\circ+\text{अ})}{\text{कोज्या}(९०^\circ+\text{अ})} = \frac{\text{कोज्या अ}}{-\text{ज्या अ}}$$

$$= -\text{कोस्प अ}$$

इसी प्रकार व्युज्ज्या $(९०^\circ+$अ$)=$व्युत्कोज्या अ,

व्युत्कोज्या $(९०^\circ+$अ$) = -$व्युज्ज्या अ,

$$कोस्प\ (९०^\circ + अ) = -\ स्प\ अ$$

उदाहरण— १२०° की निष्पत्तियां निकालो।

$$ज्या\ (१२०^\circ) = ज्या(९०^\circ + ३०^\circ) = कोज्या३०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$कोज्या\ (१२०^\circ) = कोज्या(९०^\circ + ३०^\circ) = -ज्या३०^\circ$$

$$= -\frac{१}{२}$$

$$स्प\ (१२०^\circ) = स्प(९०^\circ + ३०^\circ) = -कोस्प३०^\circ = -\sqrt{३}$$

शेष निष्पत्तियां अब लिखी जा सकती हैं।

५.६ अ की कोई भी अर्हा होनेपर कोण (१८०° − अ) अथवा (ब्या − अ) की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को कोण अ की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना।

अनुच्छेद ५.४ और ५.५ की सहायता से कोण (१८०° − अ) की निष्पत्तियां सरलता से निकाली जा सकती हैं।

$$ज्या\ (१८०^\circ - अ) = ज्या\ (९०^\circ + \overline{९०^\circ - अ})$$

$$= कोज्या\ (९०^\circ - अ)$$

(अनुच्छेद ५.५ से)

$$= ज्या\ अ$$

(अनुच्छेद ५.४ से)

कोज्या $(१८०^\circ - अ)$ = कोज्या $(९०^\circ + ९० - अ)$

= $-$ज्या $(९०^\circ - अ)$

(अनुच्छेद ५·२ से)

= $-$ कोज्या अ

(अनुच्छेद ५·३ से)

इसी प्रकार, स्प $(१८०^\circ - अ)$ = स्प $(९०^\circ + ९०^\circ - अ)$

= $-$ कोस्प $(९०^\circ - अ)$

= $-$ स्प अ

इसलिए व्युज्ज्या $(१८०^\circ - अ)$ = व्युज्ज्या अ,

व्युत्कोज्या $(१८०^\circ - अ)$ = $-$व्युत्कोज्या अ

कोस्प $(१८०^\circ - अ)$ = $-$कोस्प अ

इनकी रैखिकीय उपपत्ति (proof) विद्यार्थियों के अभ्यास के लिए छोड़ दी गई है।

उदाहरण १. $१८०^\circ$ की निष्पत्तियों का निश्चय करो।

ज्या $१८०^\circ$ = ज्या $(१८०^\circ - ०^\circ)$ = ज्या $०^\circ = ०$

कोज्या $१८०^\circ$ = कोज्या $(१८०^\circ - ०^\circ)$

= $-$कोज्या $०^\circ = -१$

स्प $१८०^\circ$ = स्प $(१८०^\circ - ०^\circ)$ = $-$स्प $०^\circ = ०$

इत्यादि

उदाहरण २. $१३५^\circ$ की निष्पत्तियों का निश्चय करो।

ज्या $१३५^\circ$ = ज्या $(१८०^\circ - ४५^\circ)$ = ज्या $४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}}$

कोज्या १३५° = कोज्या (१८०° − ४५°) = − कोज्या ४५°

$$= -\frac{१}{\sqrt{२}}$$

स्प १३५° = स्प (१८०° − ४५°) = − स्प ४५° = −१

इत्यादि

उदाहरण ३ १५०° की निष्पत्तियों का निश्चय करो।

ज्या (१५०°) = ज्या (१८०° − ३०°) = ज्या ३०° = $\frac{१}{२}$

कोज्या (१५०°) = कोज्या (१८०° − ३०°) = − कोज्या ३०°

$$= -\frac{\sqrt{३}}{२}$$

स्प (१५०°) = स्प (१८०° − ३०°) = − स्प ३०° = $-\frac{१}{\sqrt{३}}$

इत्यादि

आलोक — १२०°, १३५°, १५०° की निष्पत्तिया अनुच्छेद ५५ की सहायता से भी निकाली जा सकती है।

५७ अ की कोई भी अर्हा होने पर कोण (१८०° + अ) अथवा (प्या + अ) की निष्पत्तियों को कोण अ की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना।

अनुच्छेद ५५ के उत्तरोत्तर (successive) प्रयोग से

ये निष्पत्तियां निकाली जा सकती हैं।
इस प्रकार

ज्या $(१८०^\circ + अ)$ = ज्या $(९०^\circ + \overline{९०^\circ + अ})$
= कोज्या $(९०^\circ + अ)$ = − ज्या अ

कोज्या $(१८०^\circ + अ)$ = कोज्या $(९०^\circ + \overline{९०^\circ + अ})$
= − ज्या $(९०^\circ + अ)$ = − कोज्या अ

स्प $(१८०^\circ + अ)$ = स्प $(९०^\circ + \overline{९०^\circ + अ})$
= − कोस्प $(९०^\circ + अ)$ = स्प अ

इसलिए व्युज्ज्या $(१८०^\circ + अ)$ = − व्युज्ज्या अ
व्युत्कोज्या $(१८०^\circ + अ)$ = − व्युत्कोज्या अ
कोस्प $(१८०^\circ + अ)$ = कोस्प अ

अभ्यास के लिए विद्यार्थियों को ये सम्बन्ध रैखिकी से भी सिद्ध करने चाहिएं।

५.८ उदाहरण— कोण $(२७०^\circ - अ)$ और $(२७०^\circ + अ)$ की निष्पत्तीयां निकालो।

ज्या $(२७०^\circ - अ)$ = ज्या $(१८०^\circ + \overline{९०^\circ - अ})$
= − ज्या $(९०^\circ - अ)$ = − कोज्या अ

कोज्या $(२७०^\circ - अ)$ = कोज्या $(१८०^\circ + \overline{९०^\circ - अ})$
= − कोज्या $(९०^\circ - अ)$ = − ज्या अ

$$\text{स्प}\ (२७०^\circ - \text{अ}) = \text{स्प}\ (१८०^\circ + \overline{९०^\circ - \text{अ}})$$

$$= \text{स्प}\ (९०^\circ - \text{अ}) = \text{कोस्प अ}$$

इत्यादि

$$\text{ज्या}\ (२७०^\circ + \text{अ}) = \text{ज्या}\ (१८०^\circ + \overline{९०^\circ - \text{अ}})$$

$$= -\text{ज्या}\ (९०^\circ + \text{अ}) = -\text{कोज्या अ}$$

$$\text{कोज्या}\ (२७०^\circ + \text{अ}) = \text{कोज्या}\ (१८०^\circ + \overline{९०^\circ + \text{अ}})$$

$$= -\text{कोज्या}\ (९०^\circ + \text{अ}) = \text{ज्या अ}$$

$$\text{स्प}\ (२७०^\circ + \text{अ}) = \text{स्प}\ (१८०^\circ + \overline{९०^\circ + \text{अ}})$$

$$= \text{स्प}\ (९०^\circ + \text{अ}) = -\text{कोस्प अ}$$

इत्यादि

अन्यथा (aliter):—

$$\text{ज्या}\ (२७०^\circ - \text{अ}) = \text{ज्या}\ (३६०^\circ - ९०^\circ - \text{अ})$$

$$= \text{ज्या}\ (-९०^\circ - \text{अ}) = -\text{ज्या}\ (९०^\circ + \text{अ})$$

$$= -\text{कोज्या अ}$$

इत्यादि.

$$\text{कोज्या}\ (२७०^\circ + \text{अ}) = \text{कोज्या}\ (३६०^\circ - ९०^\circ + \text{अ})$$

$$= \text{कोज्या}\ (-९०^\circ + \text{अ})$$

$$= \text{कोज्या}\ (९०^\circ - \text{अ})$$

$$= \text{ज्या अ}$$ इत्यादि.

५.९ साधित उदाहरण—

उदाहरण १. ज्या (१५६०°) और कोस्प (−४०५°) निकालो।

$$\text{ज्या } (१५६०°) = \text{ज्या } (४ \times ३६०° + १२०°) = \text{ज्या } १२०°$$
$$= \text{ज्या } (१८० - ६०°) = \text{ज्या } ६०° = \frac{\sqrt{३}}{२}$$
$$\text{कोस्प } (-४०५°) = -\text{कोस्प } (४०५°)$$
$$= -\text{कोस्प } (३६० + ४५°)$$
$$= -\text{कोस्प } ४५° = -१$$

उदाहरण— सरल करो

$$\frac{[\text{स्प } ४५ + \text{स्प } (\text{प्या} + \text{अ})]\,[\text{कोस्प } ४०५° + \text{कोस्प}(\frac{\text{प्या}}{२} + \text{अ})]}{[\text{कोज्या अ} + \text{ज्या}(\text{प्या} - \text{अ})]\,[\text{ज्या}(\frac{\text{प्या}}{२} + \text{अ}) + \text{ज्या}(\text{प्या} + \text{अ})]}$$

और दिखाओ कि यदि $\text{अ} = \frac{\text{प्या}}{६}$, तो इसकी अर्हा $\frac{४}{३}$ होगी।

दी गई पदसंहति

$$= \frac{(१ + \text{स्प अ})\,[\text{कोस्प}(३६०° + ४५°) - \text{स्प अ}]}{(\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ})(\text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ})}$$
$$= \frac{(१ + \text{स्प अ})\,(१ - \text{स्प अ})}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$
$$= \frac{१ - \text{स्प}^२\text{अ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{१ - \frac{\text{ज्या}^२ \text{अ}}{\text{कोज्या}^२ \text{अ}}}{\text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{ज्या}^२ \text{अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{ज्या}^२ \text{अ}}{\text{कोज्या}^२ \text{अ}} \times \frac{१}{\text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{ज्या}^२ \text{अ}}$$

$$= \text{व्युत्कोज्या}^२ \text{अ}$$

यदि $\text{अ} = \frac{\text{प्या}}{६}$

तो पदसंहति $= \text{व्युत्कोज्या}^२ \frac{\text{प्या}}{६} = \frac{१}{\text{कोज्या}^२ \frac{\text{प्या}}{६}}$

$$= \frac{१}{(\sqrt{\frac{३}{२}})^२} = \frac{४}{३}$$

उदाहरण ३. सिद्ध करो कि:—

$$\left[\text{ज्या}^२ \left(\frac{\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^२ \left(\frac{३\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^२ \left(\frac{५\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^२ \left(\frac{७\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^२ \left(\frac{९\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^२ \left(\frac{११\text{प्या}}{१२}\right)\right] = ३$$

$$ज्या\left(\frac{११\pi}{१२}\right) = ज्या\left(\pi - \frac{\pi}{१२}\right) = ज्या\left(\frac{\pi}{१२}\right)$$

$$ज्या\left(\frac{९\pi}{१२}\right) = ज्या\left(\pi - \frac{३\pi}{१२}\right) = ज्या\left(\frac{३\pi}{१२}\right)$$

$$ज्या\left(\frac{७\pi}{१२}\right) = ज्या\left(\pi - \frac{५\pi}{१२}\right) = ज्या\left(\frac{५\pi}{१२}\right)$$

इसलिए $वामपक्ष = २\left[ज्या^२\left(\frac{\pi}{१२}\right) + ज्या^२\left(\frac{३\pi}{१२}\right) + ज्या^२\left(\frac{५\pi}{१२}\right)\right]$

परंतु $ज्या\left(\frac{५\pi}{१२}\right) = ज्या\left(\frac{\pi}{२} - \frac{\pi}{१२}\right) = कोज्या\left(\frac{\pi}{१२}\right)$

$\therefore$ $वामपक्ष = २\left[\left\{ज्या^२\left(\frac{\pi}{१२}\right) + कोज्या^२\left(\frac{\pi}{१२}\right)\right\} + ज्या^२\left(\frac{३\pi}{१२}\right)\right]$

$$= २\left[१ + ज्या^२\left(\frac{\pi}{४}\right)\right]$$

$$= २\left[१ + \left(\frac{१}{\sqrt{२}}\right)^२\right]$$

$$= २ \times \frac{३}{२} = ३$$

उदाहरण ४— यदि स कोई पूर्णांक हो तो सिद्ध करो कि
कोज्या (स प्या + अ) = $(-१)^{स}$ कोज्या अ

प्रथम, मान लो कि स, २घ सम एक युग्म पूर्णांक है जहां घ कोई भी एक पूर्णांक है।

तो कोज्या (स प्या + अ) = कोज्या (२ घ प्या + अ)
= कोज्या (घ३६०° + अ)
= + कोज्या अ
= $(-१)^{२घ}$ कोज्या अ
= $(-१)^{स}$ कोज्या अ

अब मान लो कि स एक अयुग्म पूर्णांक है और (२घ + १) के सम है जिसमें घ कोई भी एक पूर्णांक है।

∴ कोज्या (स प्या + अ) = कोज्या($\overline{२घ + १}$प्या + अ)
= कोज्या (२घ प्या + $\overline{प्या + अ}$)
= कोज्या (प्या + अ)
= − कोज्या अ
= $(-१)^{२घ+१}$ कोज्या अ
= $(-१)^{स}$ कोज्या अ

इस प्रकार, किसी भी पूर्णांक स के लिए,

कोज्या (स प्या + अ) = $(-१)^{स}$ कोज्या अ

## प्रश्नावलि ६

(१) निम्नलिखित समीकारों का समाधान करने वाली, $0°$ और $३६०°$ के बीच की अ कोण की अर्हाएं निश्चित करो:—

(क) ज्या अ $= \frac{१}{२}$ (का) व्युत्कोज्या अ $= \sqrt{२}$

(कि) स्प अ $= -\frac{१}{\sqrt{३}}$

(२) यदि क, ख, ग, घ किसी वृत्तीय (cyclic) चतुर्भुज के कोण हों तो सिद्ध करो कि

कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग + कोज्या घ = ०

(कलकत्ता १८६५)

(३) सरल करो:—

$$\frac{\text{ज्या } (९०° - \text{अ}) \text{ कोज्या } (-\text{अ}) \text{ स्प } (१८०° + \text{अ})}{[१ + \text{ज्या}(१८०° - \text{अ})][१ - \text{ज्या}(३६०° + \text{अ})] \text{कोस्प}(९०° - \text{अ})}$$

सिद्ध करो कि:—

(४) ज्या (४८०°) कोज्या (३३०°)

+ कोज्या (−२४०°) ज्या (−३३०°) $= \frac{१}{२}$

(५) स्प (२४०°) कोज्या (३९०°)

+ ज्या (८४०°) कोस्प (− ३०°) = ०

(६) कोज्या (६००°) कोज्या (१७०°)

= ज्या (२४०°) ज्या (६९०°) = $\frac{\sqrt{३}}{४}$

(७) स्प $\left(\frac{\text{३प्या}}{\text{२}} - \text{अ}\right)$ व्युत्कोज्या (अ) ज्या $\left(\frac{\text{प्या}}{\text{२}} + \text{अ}\right)$

= कोस्प (प्या − अ) व्युज्ज्या $\left(\frac{\text{प्या}}{\text{२}} - \text{अ}\right)$

× कोज्या (प्या + अ)

(८) कोज्या$^{५}$ $\frac{\text{प्या}}{\text{२०}}$ + कोज्या$^{५}$ $\frac{\text{३प्या}}{\text{२०}}$ + कोज्या$^{५}$ $\frac{\text{५प्या}}{\text{२०}}$ + ...

... + कोज्या$^{५}$ $\frac{\text{१९प्या}}{\text{२०}}$ = ०

(९) स्प (प्या + अ) + स्प (२प्या − अ) + स्प (३प्या + अ)

+ स्प (४प्या − अ) + ...... + स्प[(२स − १) प्या + अ]

+ स्प (२स प्या − अ) = ०

(१०) सिद्ध करो कि यदि स अयुग्म अथवा युग्म हो तो तदनुसार

ज्या अ + ज्या(प्या + अ)

+ ज्या(२प्या + अ) + ...स पदों तक

= ज्या अ अथवा = ०

(११) दिखाओ कि निम्नलिखित पद-संहतियों में से प्रत्येक ८ के सम है :—

(अ) $\text{व्युत्कोज्या}^{२} \left(\frac{\text{प्या}}{४}\right) + \text{व्युत्कोज्या}^{२} \left(\frac{३\text{प्या}}{४}\right)$

$+ \text{व्युत्कोज्या}^{२} \left(\frac{५\text{प्या}}{४}\right) + \text{व्युत्कोज्या}^{२} \left(\frac{७\text{प्या}}{४}\right)$

(आ) $\text{व्युज्ज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{४}\right) \text{व्युज्ज्या}^{२} \left(\frac{३\text{प्या}}{४}\right) \times$

$\text{व्युज्ज्या} \left(\frac{५\text{प्या}}{४}\right) \text{व्युज्ज्या}^{२} \left(\frac{७\text{प्या}}{४}\right)$

(इ) $\text{व्युत्कोज्या} \frac{\text{प्या}}{८} \left( \text{कोज्या} \frac{\text{प्या}}{८} + \text{ज्या} \frac{\text{प्या}}{४} \right)$

$+ \text{व्युत्कोज्या} \frac{३\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या} \frac{३\text{प्या}}{४} - \text{ज्या} \frac{३\text{प्या}}{८}\right)$

$+ \text{व्युत्कोज्या} \frac{५\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या} \frac{५\text{प्या}}{४} + \text{ज्या} \frac{५\text{प्या}}{४}\right)$

$+ \text{व्युत्कोज्या} \frac{७\text{प्या}}{८} \left(\text{कोज्या} \frac{७\text{प्या}}{४} - \text{ज्या} \frac{७\text{प्या}}{४}\right) \Big]$

(१२) · यदि स एक धन पूर्णांक हो, और

$\text{इ} = \left\{\frac{\text{प्या}}{२} - (२\,\text{स} - १)\,\text{इ} \right\}$ हो तो सिद्ध करो कि

$\text{स्प इ} \cdot \text{स्प ३इ} \cdot \text{स्प ५इ} \ldots\ldots \text{स्प } (२\,\text{स} - १)\text{इ} = १$

## छठा अध्याय

# दत्त त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों वाले सब कोणों के लिए सामान्य (general) पद-संहतियां

६.१ पिछले अध्याय से यह स्पष्ट हो जाता है कि यदि त्रिकोणमितीय निष्पत्ति की एक अर्हा दीहुई हो तो ऐसे असंख्य कोण हो सकते हैं जिनकी वह त्रिकोणमितीय निष्पत्ति दत्त संख्या के सम हो।

उदाहरणार्थ यदि ज्या अ $= \frac{१}{२}$ हो तो अ, ३०° अथवा इसके ऋजुपूरक (supplementary) कोण १५०° के सम हो सकता है। इनके अतिरिक्त यदि ऊपर के दोनों कोणों को ३६०° अथवा २६०° के अपवर्त्यों से वढाया अथवा घटाया जाए तो प्राप्त नये कोणों की अर्हाएं भी अ की अर्हा हो सकती हैं। इस प्रकार, ३०°, १५०°, ३९०°, ५१०°, (−३३०°), (−२१९°)...इत्यादि प्रत्येक कोण की ज्या $\frac{१}{२}$ है।

यह नियम दूसरी निष्पत्तियों के लिये भी लागू होता है।

अब कुछ ऐसी सामान्य पद-संहतियों का निश्चय किया जायगा जिनमें दत्त त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों वाली अनंत कोण-श्रेणियों (series of angles) का समावेश होता है।

६.२ मानलो कि परिभ्रमणरेखा प्रारंभिक स्थिति मय पर है। तो धन अथवा ऋण दिशा में, उसके ०, १, २, ३,

य' म य

आ ६.१

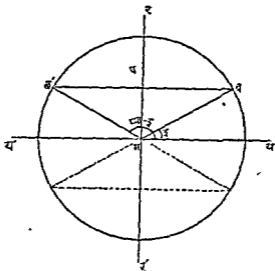
या ४...... पूर्ण परिभ्रमण हो चुके हैं। यदि उसका सर्वथा परिभ्रमण न हुआ हो तो उसके द्वारा अनुरेखित कोण शून्य होगा; यदि उसका, धन दिशा में, एक पूर्ण परिभ्रमण हो चुका हो तो अनुरेखित कोण २८या आर होगा; यदि उसका, ऋण दिशा में, एक पूर्ण परिभ्रमण हो चुका हो तो अनुरेखित कोण −२८या आर होगा।

मान लो रेखा के दो पूर्ण परिभ्रमण हो चुके हैं; और यदि परिभ्रमण प्रतिघटीवत् या घटीवत् हुआ हो तो अनुरेखित कोण ४८या अथवा −४८या होगा।

इस प्रकार जब परिभ्रमण रेखा मय स्थिति पर रहती है, तो अनुरेखित कोण ०, अथवा ±२८या, अथवा ±४८या: अथवा ±६८या......इत्यादि. के सम होता है। यदि स शून्य अथवा धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो तो ये सब कोण २. स.८या व्यंजक (expression) में समाविष्ट हो जाते हैं। मय' स्थिति पर आने के लिये परिभ्रमण रेखा को, पूर्ण परिभ्रमण कर पहिले स्थिति मय पर आना चाहिए। इसके पश्चात् ऋण अथवा धन दिशा में, एक अर्ध परिभ्रमण कर परिभ्रमण रेखा मय' से संपतन

करेगी, और इस दशा में, अनुरेखित कोण (२ स.प्या + प्या), अथवा (२ स. प्या − प्या), अर्थात् (२ स ± १) प्या के सम होगा।

६.२ दी हुई ज्या वाले लघुत्तम घन कोण की रचना करना और एक ही ज्या वाले सब कोणों को समाविष्ट करने वाली सामान्य पद-संहति निकालना।

मान लो कि किसी कोण की ज्या 'क्ष' है। म बिंदु पर मिथश्छेदी परस्पर लम्ब रेखाएं, य य' और र र' लो। म को केन्द्र मानकर ऐसा वृत्त खींचो जिसकी त्रिजा एक हो। रेखा मर पर (और यदि 'क्ष' ऋण हो तो म र' पर) मप = क्ष काटो। प से निकलती हुई सरल रेखा य'पय, रेखा य'मय के समान्तर खींचो, जो वृत्त का व और य' पर छेदन करे।

आ. ६.२

यमव कोण का इ से अभिधान किया जाय तो,

$ज्या\ इ = ज्या\ यमव = ज्या\ मवप = \frac{मप}{मव} = क्ष$

इसलिए दी हुई ज्या वाला लघुत्तम धन कोण इ है।

आकृति से स्पष्ट है कि इतनी ही ज्या का एक दूसरा कोण यमव' = (π्या − इ) है।

यदि 'क्ष' की महत्ता और उसका चिह्न दिया हों तो रमर' रेखा पर प बिंदु की स्थिति स्थिर हो जाती है। इस प्रकार परिभ्रमणरेखा क एक पूर्ण परिभ्रमण में, अनुरेखित कोण की दी हुई ज्या वाली केवल दो ही अर्हायें हो सकती हैं। अर्थात् जब परिभ्रमणरेखा मव अथवा मव' स्थितियों के अतिरिक्त और किसी दूसरी स्थिति पर न हो तो अनुरेखित कोण की ज्या, दत्त अर्हा क्ष के समान होती है। (अनुच्छेद ५.६ देखो)

जब परिभ्रमणरेखा मव स्थिति पर रहती है तो वह एक अथवा अनेक (अथवा शून्य) पूर्ण परिभ्रमण करने के पश्चात् इ कोण बनाती है। अर्थात्, पिछले अनुच्छेद से यदि घ शून्य अथवा धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो, तो परिभ्रमण-रेखा कोण (२घ. π्या + इ) ..................(१) बनाती है।

यदि परिभ्रमण-रेखा मव' स्थिति पर हो तो अनुरेखित कोण [२ घ π्या + (π्या − इ)] अर्थात्
[(२घ + १) π्या − इ] ..............................(२)
के सम होता है।

ऊपर के दोनों कोण-कुलक ( sets of angles ) पद-संहति, स. π्या + (−१)^स इ..........................(३)
में समाविष्ट होते हैं जहां स शून्य, अथवा धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक है। क्योंक

यदि स = २घ है तो (−१)^२घ = +१,

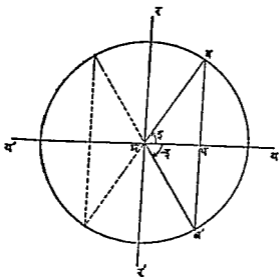
अतः पद-संहति (३) का (२ ध. प्या + इ) में रूपान्तरण हो जाता है जो पद-संहति (१) ही है।

और यदि स = २ध१ तो $(-1)^{2ध+1} = -1$।

अतः पद-संहति (३) का [(२ध + १) प्या − इ] में रूपान्तरण हो जाता है जो पदसंहति (२) ही है।

उपप्रमेयः—क्योंकि एक ही ज्या वाले सब कोणों की व्युत्क्रमज्याएँ भी समान होती हैं; अतः पद-संहति (३), एकही व्युत्क्रमज्या वाले सब कोणों के लिये भी सामान्य पदसंहति है।

६·४ दत्त कोज्या वाले लघुत्तम धन कोण की रचना करना और एक ही कोज्या वाले सब कोणों को समाविष्ट करने वाली सामान्य पद-संहति निकालना।

आ. ६.३

मान लो की दत्त कोज्या 'क्ष' है। विन्दु म पर मिथच्छेदी दो लम्ब रेखाएं य'मय और र'मर लो। मय पर (और यदि 'क्ष' ऋण हो, तो मय' पर) मप = क्ष काटो। प से निकलती हुई सरलरेखा व'पव रेखा र'मर के समान्तर खींचो।

म को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचो जिसकी त्रिज्या एक हो। मान लो कि रेखा व पव इस वृत्त का व' और व पर छेदन करती है। कोण यमव का इ से अभिधान करो।

$$\text{तो कोज्या इ} = \text{कोज्या यमव} = \frac{\text{मप}}{\text{मव}} = \text{क्ष}$$

इसलिए दत्त कोज्या वाला लघुत्तम धन कोण इ है। आकृति से यह स्पष्ट है कि इतनी ही कोज्या वाला एक दूसरा कोण यमव' = − इ है।

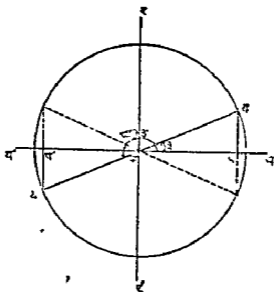
यदि क्ष की महत्ता और उसका चिह्न, दिए हों तो रेखा य'मय पर विंदु प की स्थिति स्थिर हो जाती है। इस प्रकार परिभ्रमण रेखा के एक पूर्ण परिभ्रमण में, अनुरेखित कोण की, दत्त कोज्या वाली, केवल दो ही अवस्थाएं हो सकती हैं। अर्थात् जब परिभ्रमण रेखा मव अथवा मव' स्थितियों के अतिरिक्त और किसी दूसरी स्थिति पर न हो, तो अनुरेखित कोण की कोटिज्या दत्त अर्हा क्ष के समान होती है। (अनु० ५.२ देखो)

जब परिभ्रमण रेखा मत्र स्थिति पर रहती है, तो वह शून्य अथवा कई पूर्ण परिभ्रमण करने के पश्चात् इ कोण बनाती है। अर्थात् यदि स शून्य, अथवा धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो तो अनुरेखित कोण (२ स प्या + इ) के सम होता है।

जब परिभ्रमण रेखा मत्र' स्थिति पर रहती है तो वह शून्य अथवा एक अथवा अनेक पूर्ण-परिभ्रमण करने के पश्चात् इ कोण बनाती है। अर्थात् इस दशा में अनुरेखित कोण (२ स प्या -इ) के सम होता है।

ये सब कोण पदसंहति (२ स प्या ± इ)............(१) में समाविष्ट हैं जहाँ स शून्य अथवा धन अथवा ऋण पूर्णांक है।

उपप्रमेयः— क्योंकि एक ही कोज्या वाले सब कोणों की व्युत्कोज्याएं भी समान होती हैं, अतः पदसंहति (१) एक ही व्युत्कोज्या वाले सब कोणों के लिये भी सामान्य पद-संहति है।

६.५ दत्त स्पर्शज्या वाले लघुत्तम धन कोण की रचना करना और एक ही स्पर्शज्या वाले सब कोणों को समाविष्ट करने वाली सामान्य पदसंहति निकालना।

आ. ६.४

मान लो दी हुई स्पर्शज्या 'क्ष' है। म बिन्दु पर मिथ-श्छेदी परस्पर लंब रेखाएं य'मय और र'मर लो। मय पर लम्बाई मप=१ काटो और प से मप पर लंब पव=क्ष खींचो। कोण यमव का इ से अभिधान करो। तो दत्त स्पर्शज्या वाला लघुत्तम धन कोण ई होगा।

म को केन्द्र मानकर मव के सम त्रिज्या का एक वृत्त खींचो। वम को बढ़ाओ जिससे वह वृत्त से व' बिन्दु में मिले और मय' पर लम्ब व'प' खींचो।

तो ∠यमव' = (प्या + इ) की स्पर्शज्या भी 'क्ष' होगी।

पुनः, यदि परिभ्रमण-रेखा स्थिति मव अथवा मव' के अतिरिक्त और किसी दूसरी स्थिति पर न हो, तो अनुरेखित कोण की स्पर्शज्या दत्त स्पर्शज्या के सम होती है।

(अनुच्छेद ५.६ देखो)

जब परिभ्रमण-रेखा मव स्थिति पर रहती है तो अनुरेखित कोण (२घ प्या + इ) के सम होता है जहां घ शून्य, धन अथवा ऋण पूर्णांक हो।

जब परिभ्रमण रेखा मव' स्थिति पर रहती है, तो अनुरेखित कोण २घ प्या + (प्या + इ)

अथवा [(२घ + १) प्या प्या + इ] के सम होता है।

ये सब कोण पदसंहति स·प्या + इ..................(१)

में जहां स शून्य धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक है समाविष्ट हो जाते हैं।

उपप्रमेय :— एक ही स्पर्शज्या वाले सब कोणों की कोटिस्पर्शज्याएं भी समान होती हैं, अतः पदसंहति (१) एक ही कोटिस्पर्शज्या वाले सब कोणों के लिये भी सामान्य पदसंहति है।

६.६ कुछ सचित उदाहरणः—

उदाहरण— उन सब कोणों को समाविष्ट करनेवाली सामान्य पदसंहतियां लिखो

(क) जिनकी ज्या $\frac{१}{\sqrt{२}}$ है।

(ख) जिनकी कोज्या $-\frac{\sqrt{३}}{२}$ है।

(ग) जिनकी स्पर्शज्या $\sqrt{३}$ है।

(क) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ ज्या वाला लघुतम धन कोण ४५° अथवा $\frac{पा}{४}$ है।

इसलिए अनुच्छेद ६. ३ से, $\frac{१}{\sqrt{२}}$ ज्या वाले सब कोणों के लिए सामान्य पद्संहति

$$\left\{ स\ पा + (-१)^{स} \frac{पा}{४} \right\} \text{ है।}$$

(ख) $-\frac{\sqrt{३}}{२}$ कोज्या वाला लघुतम धन कोण १५०° अथवा $\frac{५\ पा}{६}$ है।

(ग) $\sqrt{३}$ स्पर्शज्या वाला लघुत्तम धन कोण ६०° अथवा $\frac{पा}{३}$ है।

इसलिए, अनुच्छेद ६.५ से, $\sqrt{३}$ स्पर्शज्या वाले सब कोण के लिए साधारण पदसंहति स पा $+ \frac{पा}{३}$ है।

उदाहरण २.— समीकार ज्या$^{२}$ अ $=\frac{१}{२}$ का साधन करो और कोण अ की सामान्यतम (most general) अर्हा निकालो।

$$ज्या^{२} अ = \frac{१}{२}$$

$$\therefore \quad ज्या\, अ = \pm \frac{१}{\sqrt{२}}$$

उत्तर (upper) चिह्न लेने पर,

$$ज्या\, अ = \frac{१}{\sqrt{२}} = ज्या \frac{प्या}{४}$$

$$\therefore \quad अ = स\, प्या + (-१)^{स} \frac{प्या}{४}$$

अधर (lower) चिह्न लेने पर,

$$ज्या\, अ = -\frac{१}{\sqrt{२}} = ज्या \left(-\frac{प्या}{४}\right)$$

$$\therefore \quad अ = स\, प्या + (-१)^{स} \left(-\frac{प्या}{४}\right)$$

इन दोनों साधनों (solutions) को संयुक्त करने से, अ की सामान्यतम अर्हा

$$अ = स\, प्या \pm \frac{प्या}{४}$$ प्राप्त होती है।

उदाहरण २— समीकार कोज्या अ $= \frac{१}{२}$ और

स्पअ $= -\frac{१}{\sqrt{३}}$ का समाधान करने वाली (satisfying) कोण

अ की सामान्यतम अर्हाएं निकालो।

कोज्या अ $= \frac{१}{२}$ का समाधान करने वाली, ०° और

३६०° के बीच की अ की अर्हाएं ३०° और ३३०° हैं।

इसी प्रकार स्प अ $= -\frac{१}{\sqrt{३}}$ को समाधान करने वाली

०° और ३६०° के बीच की अ अर्हाएं १५०° और ३३०° हैं।

∴ दोनों समीकारों का समाधान करने वाली ०° और ३६०° के बीच की, अ की साधारण अर्हा केवल

३३०° अथवा $\frac{११ प्या}{६}$ है।

इस कोण में चार लम्ब कोणों के किसी भी अपवर्त्य के योग से अ की सामान्यतम अर्हा प्राप्त होती है।

इसलिए अ की अपेक्षित अर्हा

$$२ स प्या + \frac{११ प्या}{६} \text{ है।}$$

## प्रश्नावलि ७

निम्नलिखित समीकारों का समाधान करने वाली कोण अ की सामान्यतम अर्हा निश्चित करो :—

(१) ज्या $अ = \frac{\sqrt{३}}{२}$ (२) कोज्या $अ = ०$

(३) कोस्प $अ = -१$ (४) व्युत्कोज्या$^{२} = ४$

(५) स्प$^{२}$अ $= १$

(६) ४ व्युत्कोज्या$^{२}$अ $-$ ७स्प$^{२}$अ $= ३$

(७) यदि स कोई पूर्णांक हो तो सिद्ध करो, कि निम्नलिखित दोनों सूत्र एक ही कोण निरूपित करते हैं :—

$$(२स - १)\frac{व्या}{२} + (-१)^{स} \frac{व्या}{४} \text{ और } २स\,व्या \pm \frac{व्या}{४}$$

(८) सिद्ध करो कि स व्या $+ (-१)^{स}$ (व्या $-$ इ) और

$$\left(२स\,व्या \pm \frac{३व्या}{२} - \frac{व्या}{२}\right) \pm इ$$ दोनों सूत्र एक ही कोण का निरूपण करते हैं।

(९) कोस्प अ $= १$ और ज्या $अ = \frac{१}{\sqrt{२}}$ इन दोनों समीकारों का समाधान करने वाली कोण अ की सामान्यतम अर्हा निकालो।

(१०) यदि स्पमअ + कोस्प न अ + स्प$\frac{व्या}{४}$ कोस्प $\frac{३व्या}{४} = ०$

हों, तो सिद्ध करो कि इस समीकार का समाधान करनेवाली अ की अर्हाएं समान्तर श्रेढी में हैं और इस श्रेढी का प्रचय ( common difference ) निकालो।

६.७ जिस समीकार में एक अथवा अनेक त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां अन्तर्भूत हों, उसे त्रिकोणमितीय-समीकार कहते हैं।

नीचे कुछ सरल त्रिकोणमितीय समीकार सिद्ध किए गए हैं।

उदाहरण १— सिद्ध करो :—

$$२ \text{ कोज्या}^२ अ + \sqrt{२} \text{ ज्या } अ = २$$ [ कलकत्ता १९०२

यह समीकार इस प्रकार लिखा जा सकता है :—

$$२ (१ - \text{ज्या}^२ अ) + \sqrt{२} \text{ ज्या } अ = २$$

अथवा $२ - २\text{ज्या}^२ अ + \sqrt{२} \text{ ज्या } अ = २$

अथवा $\sqrt{२} \text{ ज्या } अ (१ - \sqrt{२} \text{ ज्या } अ) = ०$

अतः या तो $\text{ज्या } अ = ०$ ......... (१)

अथवा $१ - \sqrt{२} \text{ ज्या } अ = ०$ ......... (२)

(१) से,

$$\text{ज्या } अ = ० = \text{ज्या } ०^\circ$$

अतः अ की सामान्यतम अर्हा $अ = स$ प्या है।

(२) से,

$$\text{ज्या } अ = \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{४}$$

अतः अ की दूसरी सामान्यतम अर्हा

$$अ = स\ प्या + (-१)^{स} \frac{प्या}{४}$$ है।

उदाहरण २— सिद्ध करो :—

स्प अ = कोस्प त अ

$$स्प\ अ = कोस्प\ त\ अ = स्प \left(\frac{प्या}{२} - त\ अ\right)$$

अतः यदि स शून्य अथवा धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो तो

$$अ = स\ प्या + \left(\frac{प्या}{२} - त\ अ\right)$$

$$अथवा\ अ = \left(स + \frac{१}{२}\right) \frac{प्या}{त+१}$$

## प्रश्नावलि ८

इन समीकारों का साधन करो :—

(१) $ज्या^{२}\ अ + \frac{\sqrt{२}-१}{२}\ कोज्या\ अ + \frac{१}{\sqrt{२}} \left(\frac{१}{२} - \sqrt{२}\right) = ०$

(२) व्युज्ज्या$^2$ अ + कोस्प$^2$ अ = ३कोस्प अ

[कलकत्ता १९०८

(३) २ स्प$^2$ य = ७ − ३ व्युत्कोज्या य [नागपुर १९३९

(४) $\surd$३ − ज्या अ कोज्या अ = $\surd$३ज्या$^2$अ

(५) ज्या ७ अ = ज्या ३ अ

(६) कोज्या ५ अ = ज्या अ

(७) कोस्प अ = कोस्प $\frac{१}{अ}$

(८) स्प (इ + ई) = $-\frac{१}{\surd ३}$

और कोस्प (इ − ई) = $\surd$३

(९) कोज्या (३य + ५र) = $\frac{१}{\surd २}$

और कोज्या (५य + ३ र) = $\frac{१}{२}$

(१०) समीकार क कोज्या अ + ख ज्या अ = ग का साधन करो और दिखाओ कि यदि क$^2$ + ख$^2$ = ग$^2$ हो तो अ की दोनों अर्हाएं समान होंगी।

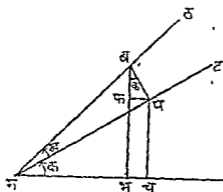
[कलकत्ता १८८२

# सातवां अध्याय

## योग और वियोग प्रमेय गुणन-सूत्र

७·१ योग-प्रमेय (addition theorem)—
अब यह सिद्ध किया जायगा कि

$$\text{ज्या (क+ख)} = \text{ज्या क. कोज्या ख} + \text{कोज्या क. ज्या ख}$$

और, $$\text{कोज्या (क+ख)} = \text{कोज्या क. कोज्या ख} - \text{ज्या क. ज्या ख}$$

मान लो परिभ्रमण रेखा मय स्थिति से प्रतिघटीवत् परिभ्रमण आरम्भ कर, कोण यमट (=क) का अनुरेखण करती है और पुनः कोण टमठ (=ख) का अनुरेखण करती है; इसलिए

∠यमठ
= ∠यमट + ∠टमठ
= क+ख

आ.७.१

रेखा मठ पर कोई बिंदु ब लो और रेखा मय और रेखा मट पर क्रमशः बभ और बप लंब खींचो। बिंदु प से रेखा मय और रेखा बभ पर क्रमशः पच और पफ लम्ब खींचो।

$\angle$मभव और $\angle$मपव लंब कोण हैं, इसलिए बिंदु म, भ, प और व संवृतीय (concyclic) होंगे।

अतः $\angle$पवभ और $\angle$भमप के एक ही खंड (segment) में होने के कारण,

$$\angle पवभ = \angle भमप = क$$

अर्थात् $\angle$पवभ = क ...................... (१)

इसलिए, $ज्या(क+ख) = ज्या\angle यमठ = \frac{भय}{मव} = \frac{भफ+फय}{मव}$

पफभच आयत (rectangle) है।

अतः भफ = चप

$$\therefore ज्या\ (क+ख) = \frac{चप}{मव} + \frac{फव}{मव}$$

$$= \frac{चप}{मप} \cdot \frac{मप}{मव} + \frac{फव}{पव} \cdot \frac{पव}{मव}$$

$\therefore$ ज्या (क + ख) = ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

पुनः, $कोज्या\ (क+ख) = कोज्या\ \angle यमठ = \frac{मभ}{मव}$

$$= \frac{मच - भच}{मव}$$

और भच = फप

$\therefore$ कोज्या (क+ख) $= \frac{\text{मच}}{\text{मब}} - \frac{\text{फप}}{\text{मब}}$

$$= \frac{\text{मच}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मब}} - \frac{\text{फप}}{\text{पब}} \cdot \frac{\text{पब}}{\text{मब}}$$

$=$ कोज्या क. कोज्या ख $-$ ज्या $\angle$ पबफ. ज्या ख

$=$ कोज्या क. कोज्या ख $-$ ज्या क. ज्या ख

$\therefore$ कोज्या (क+ख) = कोज्या क.कोज्या ख $-$ ज्या क.ज्या ख

७·११ गतानुच्छेद की आकृति, कोण क और कोण ख के धन तथा निकोण होने की दशा के लिये खींची गई थी, परन्तु किन्हीं महत्ताओं के कोणों के लिए भी यही उपपत्ति लागू होती है; केवल राशियों के चिन्हों पर उचित ध्यान देने की आवश्यकता है।

ऊपर दिये गए प्रमेयों की सत्यता इस प्रकार से भी दर्शाई जा सकती है।

पहले मान लो क और ख न्यून कोण हैं, अतः (गतानुच्छेद से) क और ख के लिए ये प्रमेय सत्य हैं।

अब मानलो कि $\text{क}_1 = ९०° + \text{क}$

और $\text{ख}_1 = \text{ख}$

तो ज्या $(\text{क}_1 + \text{ख}_1)$ = ज्या$(९०° + \overline{\text{क} + \text{ख}})$ = कोज्या(क + ख)

= कोज्या क कोज्या ख $-$ ज्या क ज्या ख

(पिछले अनुच्छेदसे)

परंतु ज्या $(९०^\circ + क)$ = कोज्या क

और कोज्या $(९०^\circ + क) = -$ ज्या क

$\therefore$ ज्या $(क_१ + ख_१)$ = ज्या $(९०^\circ + क)$ कोज्या ख

+ कोज्या $(९०^\circ + क)$ ज्या ख

= ज्या $क_१$ कोज्या $ख_१$ + कोज्या $क_१$ ज्या $ख_१$

........ (१)

इसी प्रकार,

कोज्या $(क_१ + ख_१)$

= कोज्या $(९०^\circ + \overline{क + ख})$

= − ज्या (क + ख)

= − ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्या ख

(७·१ अनुच्छेद से)

= कोज्या $(९०^\circ + क)$ कोज्या ख − ज्या $(९०^\circ + क)$ ज्या ख

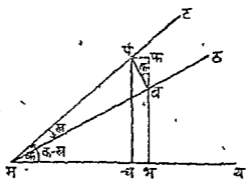
= कोज्या $क_१$ कोज्या $ख_१$ − ज्या $क_१$ ज्या $ख_१$

..........(२)

इसी प्रकार ख के स्थान में $ख_१ = ९०^\circ + ख$ लिखकर भी प्रमेय (१) और (२) सिद्ध किए जा सकते हैं।

इसी प्रकार $क_२ = ९०^\circ + क_१$ और $ख_२ = ९०^\circ + ख_१$ लेने से, क और ख की, $0^\circ$ और $२७०^\circ$ के बीच की किन्हीं भी महत्ताओं के लिए, इन प्रमेयों की सत्यता सिद्ध होती है।

इस रीति से अग्रसर होने पर क और ख की किन्हीं भी महत्ताओं के लिए इन प्रमेयों की सत्यता सिद्ध की जा सकती है।

७.२ वियोग-प्रमेय (subtraction theorem)—
अब यह सिद्ध किया जायगा कि,
ज्या (क − ख) = ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्या ख
और कोज्या(क − ख) = कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

आ ७.२

मान लो, कि परिभ्रमण-रेखा मय स्थिति से प्रतिघटीवत् परिभ्रमण करना आरम्भ कर कोण यमट (= क) का। अनुरेखण करती है और तदनंतर घटीवत् परिभ्रमण कर महत्ता में ख के समान एक कोण का अनुरेखण करती है और इस प्रकार अंतिम स्थिति मठ पर आ पंहुचती है

इसलिये $\angle$यमठ = $\angle$यमट − $\angle$टमठ
= क − ख

रेखा मठ पर विंदु व लो औ व से रेखा मय और मट पर क्रमशः वभ और वप लम्ब खींचो। विंदु प से रेखा मय और वर्धित रेखा भव पर क्रमशः लम्ब पच और पफ खींचो।

क्योंकि $\angle$मभव + $\angle$मपव = १८०°
अतः चतुर्भुज मभवप वृत्तीय (cyclic) है।

$\angle$पवफ = $\angle$भमप = क ............(१)

इसलिए ज्या (क − ख) = ज्या यमठ − $\frac{\text{भव}}{\text{मव}} = \frac{\text{भफ} - \text{वफ}}{\text{मव}}$

परन्तु, पफभच एक आयत है। अतः भफ = चप

$\therefore$ ज्या (क − ख) = $\frac{\text{चप}}{\text{मव}} - \frac{\text{वफ}}{\text{मव}}$

$= \frac{\text{चप}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मव}} - \frac{\text{वफ}}{\text{वप}} \cdot \frac{\text{वप}}{\text{मव}}$

= ज्या क · कोज्या ख − कोज्या $\angle$पवफ ज्या ख
= ज्या क · कोज्या ख − कोज्या क · ज्या ख

[(१) से]

$\therefore$ ज्या (क − ख) = ज्या क कोज्या ख − कोज्या क. ज्या ख

$$\text{कोज्या}(\text{क} - \text{ख}) = \text{कोज्या} \angle \text{यमठ}$$

$$= \frac{\text{मभ}}{\text{मव}}$$

$$= \frac{\text{मच} + \text{चभ}}{\text{मव}}$$

परन्तु पफभच एक आयत है।

अतः $\text{चभ} = \text{पफ}$

$$\therefore \text{कोज्या} (\text{क} - \text{ख})$$

$$= \frac{\text{मच}}{\text{मव}} + \frac{\text{पफ}}{\text{मव}}$$

$$= \frac{\text{मच}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मव}} + \frac{\text{पफ}}{\text{पव}} \cdot \frac{\text{पव}}{\text{मव}}$$

$$= \text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या} \angle \text{पवफ ज्याख}$$

$$= \text{कोज्या क.कोज्या ख} + \text{ज्या क. ज्या ख}$$

{(१) से

$\therefore$ कोज्या (क − ख) = कोज्या क. कोज्याख + ज्या क. ज्या ख

उदाहरण— अनुच्छेद ७.११ के अनुसार, किन्ही भी महत्ताओं के कोणों के लिये, ऊपर दी हुई उपपत्ति का प्रयोग करो।

७.३ यह सिद्ध करना है कि

$$(१)\ \text{स्प} (\text{क} + \text{ख}) = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क} \cdot \text{स्प ख}}$$

$$(२)\ \text{स्प}\,(\text{क}-\text{ख}) = \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{१ + \text{स्प क}\cdot\text{स्प ख}}$$

पूर्व उपलब्धि के अनुसार

$$\text{स्प}\,(\text{क}+\text{ख}) = \frac{\text{ज्या}\,(\text{क}+\text{ख})}{\text{कोज्या}\,(\text{क}+\text{ख})}$$

$$= \frac{\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}}{\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}}$$

अब अंश और हर को कोज्या क कोज्याख से भाग देने पर,

$$\text{स्प}\,(\text{क}+\text{ख}) = \frac{\frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}} + \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}{१ - \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्या क}} \times \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}$$

$$= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क}\cdot\text{स्प ख}}$$

$$\text{पुनः}\ \ \text{स्प}\,(\text{क}-\text{ख}) = \frac{\text{ज्या}\,(\text{क}-\text{ख})}{\text{कोज्या}\,(\text{क}-\text{ख})}$$

$$= \frac{\text{ज्या क कोज्या ख} - \text{कोज्या क ज्याख}}{\text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या क ज्या ख}}$$

अब अंश और हर को कोज्या क कोज्या ख से भाग देने पर,

$$\text{स्प}\,(\text{क}-\text{ख})=\frac{\dfrac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}}-\dfrac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}{१+\dfrac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}}\cdot\dfrac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}$$

$$=\frac{\text{स्प क}-\text{स्प ख}}{१+\text{स्प क}\cdot\text{स्प ख}}$$

$$\text{अतः स्प}\,(\text{क}+\text{ख})=\frac{\text{स्प क}+\text{स्प ख}}{१-\text{स्प क}\cdot\text{स्प ख}}$$

$$\text{और स्प}\,(\text{क}-\text{ख})=\frac{\text{स्प क}-\text{स्प ख}}{१+\text{स्प क}\cdot\text{स्प ख}}$$

७.४ सिद्ध करो:—

$$\text{कोस्प}\,(\text{क}+\text{ख})=\frac{\text{कोस्प क कोस्प ख}-१}{\text{कोस्प क}+\text{कोस्प ख}}$$

$$\text{कोस्प}\,(\text{क}+\text{ख})=\frac{\text{कोज्या}\,(\text{क}+\text{ख})}{\text{ज्या}\,(\text{क}+\text{ख})}$$

$$=\frac{\text{कोज्या क कोज्या ख}-\text{ज्या क ज्या ख}}{\text{ज्या क कोज्या ख}+\text{कोज्या क ज्या ख}}$$

अंश और हर को ज्या क ज्या ख से भाग देने पर,

$$= \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{\sqrt{३}}{२} - \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{१}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{स्प } ७५^\circ = \text{स्प } (४५^\circ + ३०^\circ)$$

$$= \frac{\text{स्प } ४५^\circ + \text{स्प } ३०^\circ}{१ - \text{स्प } ४५^\circ \text{ स्प } ३०^\circ}$$

$$= \frac{१ + \frac{१}{\sqrt{२}}}{१ - \frac{१}{\sqrt{३}}} = \frac{\sqrt{३} + १}{\sqrt{३} - १}$$

$$= २ + \sqrt{३}$$

७५° और १५° लंब पूरक कोण हैं अतः कोण १५° की निष्पत्तियां कोण ७५° की निष्पत्तियों की सहायता से लिख सकते हैं। इसलिए

$$\text{ज्या } १५^\circ = \text{कोज्या } ७५^\circ = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या } १५^\circ = \text{ज्या } ७५^\circ = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{कोस्प}\ (\text{क}+\text{ख}) = \frac{\dfrac{\text{कोज्या क कोज्या ख}}{\text{ज्या क ज्या ख}} - १}{\dfrac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ख}} + \dfrac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या क}}}$$

$$= \frac{\text{कोस्प क कोस्प ख} - १}{\text{कोस्प ख} + \text{कोस्प क}}$$

इसी प्रकार,

$$\text{कोस्प}\ (\text{क}-\text{ख}) = \frac{\text{कोस्प क. कोस्प ख} + १}{\text{कोस्प ख} - \text{कोस्प क}}$$

७'५ ७५° और १५° की त्रिकोणमितीय निष्पात निकालो।

$$\text{ज्या}\ ७५° = \text{ज्या}\ (४५° + ३०°)$$

$$= \text{ज्या}\ ४५°\ \text{कोज्या}\ ३०° + \text{कोज्या}\ ४५°\ \text{ज्या}\ ३०°$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{\sqrt{३}}{२} + \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{१}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या}\ ७५° = \text{कोज्या}\ (४५° + ३०°)$$

$$= \text{कोज्या}\ ४५°\ \text{कोज्या}\ ३०° - \text{ज्या}\ ४५°\ \text{ज्या}\ ३०°$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{\sqrt{३}}{२} - \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{१}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{स्प } ७५^\circ = \text{स्प } (४५^\circ + ३०^\circ)$$

$$= \frac{\text{स्प } ४५^\circ + \text{स्प } ३०^\circ}{१ - \text{स्प } ४५^\circ \text{ स्प } ३०^\circ}$$

$$= \frac{१ + \frac{१}{\sqrt{३}}}{१ - \frac{१}{\sqrt{३}}} = \frac{\sqrt{३} + १}{\sqrt{३} - १}$$

$$= २ + \sqrt{३}$$

७५° और १५° लंब पूरक कोण हैं अतः कोण १५° की निष्पत्तियां कोण ७५° की निष्पत्तियों की सहायता से लिख सकते हैं । इसलिए

$$\text{ज्या } १५^\circ = \text{कोज्या} ७५^\circ = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या } १५^\circ = \text{ज्या } ७५^\circ = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}}$$

स्प १५° = कोस्प ७५° = २ − √३

इत्यादि

१५° अर्थात् ( ४५° − ३०° ) की निष्पत्तियाँ, वियोग-प्रमेय के प्रयोग से भी निश्चित की जा सकती हैं।

उदाहरण २— योग-प्रमेय को मान कर वियोग-प्रमेय सिद्ध करो।

जैसा कि पहले सिद्ध किया जा चुका है

ज्या (क + ख) = ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क + ख) = कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख

और स्प (क + ख) = $\frac{\text{स्प क + स्प ख}}{\text{१ − स्प क स्प ख}}$.

ऊपर के प्रत्येक सूत्र में ख के स्थान में −ख रखो।

तो, ज्या (क − ख) = ज्या क·कोज्या (−ख)

+ कोज्या क·ज्या (−ख)

= ज्या क·कोज्या ख

− कोज्या क·ज्या ख

(अनुच्छेद ५.२ से)

कोज्या (क − ख) = कोज्या क·कोज्या (−ख)

− ज्या क ज्या (−ख)

= कोज्या क·कोज्या ख

+ ज्या क·ज्या ख

और, स्प (क − ख) $= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प} (-\text{ख})}{१ - \text{स्प क स्प} (-\text{ख})}$

$= \frac{\text{स्पक} - \text{स्पख}}{१ + \text{स्पक·स्पख}}$

विलोम क्रमसे (conversely), इसी रीति द्वारा वियोग-प्रमेय से योग प्रमेय भी सिद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण ३— योग और वियोग-प्रमेय की सहायता से पांचवें अध्याय का कोई भी संबंध ज्ञात किया जा सकता है।

इस प्रकार ज्या (−अ) = ज्या (० − अ)

= ज्या०·कोज्या अ − कोज्या०· ज्या अ

(अनुच्छेद ७·२ से)

= ०· कोज्या अ − १· ज्या अ

= − ज्या अ

पुनः; ज्या (९०° + अ) = ज्या ९०°·कोज्या अ

+ कोज्या ९०° ज्या अ

(अनुच्छेद ७·१ से)

= १· कोज्या अ + ०·ज्या अ

= कोज्या अ

स्प (प्या − अ) $= \frac{\text{स्प प्या} - \text{स्प अ}}{१ + \text{स्प प्या·स्प अ}}$

$= \frac{० - \text{स्प अ}}{१ + ०\text{·स्प अ}}$

= − स्प अ

कोज्या (प्या + अ) = कोज्या प्या·कोज्या अ
− ज्या प्या·ज्या अ
(अनुच्छेद ७.१ से)
= −१· कोज्या अ − ०·ज्या अ
= −कोज्या अ

उदाहरण ४— सिद्ध करो कि

कोज्या (क + ख)·कोज्या (क − ख) = कोज्या$^2$क − ज्या$^2$ख

और ज्या (क + ख)·ज्या (क − ख) = कोज्या$^2$ख − कोज्या$^2$क

(अनुच्छेद ७.१ और ७.२ से)

कोज्या (क + ख)·कोज्या (क − ख)
= (कोज्या क कोज्या ख − ज्या क·ज्या ख) ×
(कोज्या क·कोज्या ख + ज्या क·ज्या ख)
= कोज्या$^2$क कोज्या$^2$ख − ज्या$^2$क ज्या$^2$ख
= कोज्या$^2$क (१ − ज्या$^2$ख)
− (१ − कोज्या$^2$क) ज्या$^2$ ख
= कोज्या$^2$क − ज्या$^2$ख

और ज्या (क + ख) ज्या (क − ख)
= (ज्या क·कोज्या ख + कोज्या क·ज्या ख) ×
(ज्या क·कोज्या ख − कोज्या क·ज्या ख)
= ज्या$^2$क·कोज्या$^2$ ख − कोज्या$^2$क·ज्या$^2$ ख
= (१ − कोज्या$^2$ क) कोज्या$^2$ ख
− कोज्या$^2$क (१ − कोज्या$^2$ ख)
= कोज्या$^2$ ख − कोज्या$^2$ क

उदाहरण ५— सिद्ध करो कि—

$$\frac{\text{कोज्या } ९^\circ + \text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ - \text{ज्या } ९^\circ} = \text{स्प } ५४^\circ$$

$$\text{स्प } ५४^\circ = \text{स्प } (४५^\circ + ९^\circ) = \frac{\text{स्प } ४५^\circ + \text{स्प } ९^\circ}{१ - \text{स्प } ४५^\circ \text{ स्प} ९^\circ}$$

$$= \frac{१ + \text{स्प } ९^\circ}{१ - \text{स्प } ९^\circ} = \frac{१ + \frac{\text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ}}{१ - \frac{\text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } ९^\circ + \text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ - \text{ज्या } ९^\circ}$$

## प्रश्नावलि ९

(१) यदि ज्या इ $= \frac{५}{१२}$ व कोज्या ई $= \frac{४}{५}$ हो तो ज्या(इ + ई), कोज्या(इ − ई) और स्प(इ − ई) की अर्हाएं निकालो।

(२) यदि स्प उ $= \frac{६}{७}$ और स्प ऊ $= \frac{१}{१३}$ हो तो सिद्ध करो कि, (उ + ऊ) $= \frac{\pi}{४}$

(३) यदि स्पक $= \frac{१}{४}$ और स्पख $= \frac{३}{५}$ हो तो (क + ख) की अर्हा निकालो।

सिद्ध करो—

(४) $\text{ज्या}\,(६०^\circ - \text{अ})\ \text{कोज्या}\,(३०^\circ - \text{आ}) + \text{कोज्या}(६०^\circ - \text{अ})\ \text{ज्या}(३०^\circ - \text{आ}) = \text{कोज्या}\,(\text{अ} + \text{आ})$

(५) $\text{कोज्या}\,(८०^\circ + \text{अ})\ \text{कोज्या}\,(८०^\circ - \text{अ}) + \text{ज्या}(८०^\circ + \text{अ})\text{ज्या}(८०^\circ - \text{अ}) = \text{कोज्या}\ २\ \text{अ}$

(६) $\text{कोज्या}\ ७५^\circ + \text{ज्या}१०५^\circ = \text{ज्या}७५^\circ - \text{कोज्या}१०५^\circ$

(७) $\dfrac{\text{ज्या}\,(\text{क} - \text{ख})}{\text{ज्या क}\cdot\text{ज्या ख}} + \dfrac{\text{ज्या}\,(\text{ख} - \text{ग})}{\text{ज्या ख}\cdot\text{ज्या ग}} + \dfrac{\text{ज्या}\,(\text{ग} - \text{क})}{\text{ज्या ग}\cdot\text{ज्या क}} = ०$

(८) $\left\{\text{ज्या}(\text{अ} + \text{आ})\text{कोज्या इ} - \text{कोज्या}(\text{आ} + \text{इ})\,\text{ज्या अ}\right\} = \text{ज्या आ कोज्या}\,(\text{इ} - \text{अ})$

(९) $\text{कोस्प क} - \text{कोस्प}\ २\ \text{क} = \text{व्युज्या}\ २\ \text{क}$

[कलकत्ता १८७०

(१०) $१ + \text{स्प अ स्प}२\text{अ} - \text{व्युत्कोज्या}\ २\text{अ} = ०$

[कलकत्ता १८६७

(११) $\dfrac{१ + \text{स्प क कोस्प ख}}{\text{कोस्प ख} - \text{स्प क}} = \text{स्प}\,(\text{क} + \text{ख})$

(१२) $\text{स्प}\dfrac{\text{प्या}}{४} + \text{स्प}\dfrac{\text{प्या}}{६}\ \text{स्प}\dfrac{\text{प्या}}{१२} = \sqrt{१ + \text{स्प}^२\dfrac{\text{प्या}}{६}}$

(१३) $\text{स्प}\left(\dfrac{\text{प्या}}{४} + \text{अ}\right)\text{स्प}\left(\dfrac{\text{प्या}}{४} - \text{अ}\right) + \text{कोस्प}\left(\dfrac{\text{प्या}}{४} + \text{अ}\right)\ \text{कोस्प}\left(\dfrac{३\text{प्या}}{४} + \text{अ}\right) = ०$

(१४) स्प ५०° + स्प१०° + $\sqrt{३}$ स्प ५०° · स्प१०° = $\sqrt{३}$ ।

(१५) स्प (४५° + क) स्प (४५° − क) = १

(१६) यदि स्प ख = $\dfrac{\text{स · ज्या क · कोज्या क}}{\text{१ − स ज्या}^2\text{क}}$ हो तो दिखाओ

कि, स्प (क − ख) = (१ − स) स्प क [पटना १९४१

(१७) सिद्ध करो कि क की किसी भी अर्हा के लिये,

$\dfrac{\text{कोस्प क}}{\text{१ + कोस्प क}} \cdot \dfrac{\text{कोस्प (४५° − क)}}{\text{१ + कोस्प (४५° − क)}}$ की अर्हा सदा अपरिवर्ती रहती है। [पटना १९४२

(१८) यदि कोण क के ऐसे दो भाग किये जायं कि उन दो भागों की स्पर्शज्याओं की निष्पत्ति 'न' हो और उन दोनों भागों का अन्तर य हो तो दिखाओ कि,

ज्या य = $\dfrac{\text{न − १}}{\text{न + १}}$ ज्या क [इलाहाबाद १९४५

७·३ गुणनफलों का, योग और वियोग-फलों में रूपान्तरण—

अनुच्छेद ७·१ और ७·२ से,

ज्या (क + ख) = ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख ... (अ)

ज्या (क − ख) = ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्या ख ... (आ)

कोज्या (क + ख) = कोज्या क कोज्या ख
— ज्या क ज्या ख ... (इ)

कोज्या (क − ख) = कोज्या क कोज्या ख
+ ज्या क ज्या ख ... (ई)

(अ) और (आ) के योग से,

ज्या (क + ख) + ज्या (क − ख)
= २ज्या क कोज्या ख ... (१)

(अ) से (आ) के वियोग से,

ज्या (क + ख) − ज्या (क − ख)
= २कोज्या क ज्या ख ... (२)

(इ) और (ई) के योग से,

कोज्या (क − ख) + कोज्या (क + ख)
= २कोज्या क कोज्या ख ... (३)

(ई) से (इ) के वियोग से,

कोज्या (क − ख) − कोज्या (क + ख)
= २ज्या क ज्या ख ... (४)

ऊपर दिये चार सूत्र अब इस प्रकार लिखे जायँगे ।

२ज्या क कोज्या ख = ज्या (क + ख)
+ ज्या (क − ख) ... (५)

२कोज्या क ज्या ख = ज्या (क + ख)
− ज्या (क − ख) ... (६)

$$२\text{कोज्या क कोज्या ख} = \text{कोज्या }(क+ख) + \text{कोज्या }(क-ख) \quad \ldots (७)$$

$$२\text{ज्या क ज्या ख} = \text{कोज्या }(क-ख) - \text{कोज्या }(क+ख) \quad \ldots (८)$$

(५) से (८) तक के चार सूत्र दो ज्याओं और कोटिज्याओं के गुणनफल को दो ज्याओं अथवा दो कोटिज्याओं के योग और वियोग में रूपांतरित करते हैं।

७·७ योग अथवा वियोग-फलों का गुणनफलों में रूपान्तरण।

मान लो $(क+ख) = ग$ और $(क-ख) = घ$

$$\text{तो,}\quad क = \frac{ग+घ}{२} \text{ और } ख = \frac{ग-घ}{२}$$

अनुच्छेद ७·६ के सूत्र (१), (२), (३) और (४) में क और ख के स्थान में, उनकी ऊपर दी गई अर्हाओं का आदेश करने से और सूत्र (४) को इस प्रकार लिखने से

$$\text{कोज्या}(क+ख) - \text{कोज्या}(क-ख) = -२\text{ ज्या क ज्या ख} = २\text{ज्या क ज्या}(-ख)$$

चार नये सूत्र प्राप्त होते हैं। ये सूत्र दो ज्याओं, अथवा दो कोज्याओं के योग अथवा वियोग को ज्याओं और कोज्याओं के गुणन-फल के रूप में व्यक्त करते हैं।

ये सूत्र नीचे दिए गए हैं।

$$\text{ज्या ग} + \text{ज्या घ} = २\text{ज्या}\frac{\text{ग}+\text{घ}}{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ग}-\text{घ}}{२} \quad \dots (१)$$

$$\text{ज्या ग} - \text{ज्या घ} = २\text{कोज्या}\frac{\text{ग}+\text{घ}}{२}\ \text{ज्या}\frac{\text{ग}-\text{घ}}{२} \quad \dots (२)$$

$$\text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = २\text{कोज्या}\frac{\text{ग}+\text{घ}}{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ग}-\text{घ}}{२} \quad \dots (३)$$

$$\text{कोज्या ग} - \text{कोज्या घ} = २\text{ज्या}\frac{\text{ग}+\text{घ}}{२}\ \text{ज्या}\frac{\text{घ}-\text{ग}}{२} \quad \dots (४)$$

इन्हें गुणन-सूत्र कहते हैं।

७·८ दत्त ज्या वाले सब कोणों की सामान्य अर्हा निकालो।

मान लो दत्त ज्या वाला लघुतम धन कोण इ है और उसी ज्या वाला एक दूसरा कोण अ है।

तो अब अ की वह सामान्य अर्हा निकालना है जो निम्न-लिखित समीकार का समाधान कर सके—

$$\text{ज्या अ} = \text{ज्या इ}$$

अथवा, $\text{ज्या अ} - \text{ज्या इ} = ०$

∴ अनुच्छेद ७·७ के सूत्र (२) से,

$२ज्या \frac{अ-इ}{२} कोज्या \frac{अ+इ}{२} = ०$

अतः या तो $ज्या \frac{अ-इ}{२} = ०$ ......................(१)

अथवा $कोज्या \frac{अ+इ}{२} = ०$ ......................(२)

(१) से, $\frac{१}{२}(अ-इ) =$ प्या का कोई अपवर्त्य

$= घ$ प्या,

∴ $अ = २घ$ प्या $+ इ$ ..............(क)

(२) से, $\frac{अ+इ}{२} = \frac{प्या}{२}$ का कोई अयुग्म अपवर्त्य

$= (२घ+१)\frac{प्या}{२}$

∴ $अ = -इ + (२घ+१)$ प्या.............. (ख)

यदि स शून्य अथवा धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो तो (क) और (ख) दोनों अर्हाएं $अ = स$ प्या $+ (-१)^{स} इ$ पद-संहति में समाविष्ट होती हैं ।

इसी प्रकार दत्त कोटिज्या अथवा दत्त स्पर्शज्या वाले सब कोणों के लिए भी सामान्य पदसंहतियां निश्चित की जा सकती हैं।

७·२ उदाहरण १— सिद्ध करो कि—

$$२ज्या \frac{प्या}{११} \cdot ज्या \frac{७ प्या}{११} + ज्या \frac{प्या}{२२} - ज्या \frac{५ प्या}{२२} = ०$$

अनुच्छेद ७·८ के सूत्र (८) से,

$$२ ज्या \frac{प्या}{११} ज्या \frac{७ प्या}{११} = कोज्या \frac{६ प्या}{११} - कोज्या \frac{८ प्या}{११}$$

$$परंतु\ कोज्या \frac{६प्या}{११} = कोज्या \left(\frac{प्या}{२} + \frac{प्या}{२२}\right)$$

$$= -ज्या \frac{प्या}{२२}$$

$$और\ कोज्या \frac{८प्या}{११} = ज्या \left(\frac{प्या}{२} - \frac{८प्या}{११}\right)$$

$$= ज्या \left(-\frac{५प्या}{२२}\right)$$

$$= -ज्या \frac{५प्या}{२२}$$

$$इसलिए,\ २ज्या \frac{प्या}{११} \cdot ज्या \frac{७प्या}{११} = -ज्या \frac{प्या}{२२} + ज्या \frac{५प्या}{२२}$$

अथवा, $२ज्या \frac{प्या}{११} \cdot ज्या \frac{७प्या}{११} + ज्या \frac{प्या}{२२} - ज्या \frac{५प्या}{२२} = ०$

उदाहरण २— सरल करो—

$$\frac{ज्या\ अ + ज्या\ २\ अ + ज्या\ ३\ अ + ज्या\ ४\ अ}{कोज्या\ अ + कोज्या\ २\ अ + कोज्या\ ३\ अ + कोज्या\ ४अ}$$

अंश $= (ज्या\ अ + ज्या\ ४\ अ) + (ज्या\ २\ अ + ज्या\ ३\ अ)$

$= २ज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{३अ}{२} + २ज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{अ}{२}$

(अनुच्छेद ७·७ से)

$= २ज्या \frac{५अ}{२} \left( कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)$

हर $= (कोज्या\ अ + कोज्या\ ४अ) + (कोज्या\ २अ + कोज्या\ ३अ)$

$= २कोज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{३अ}{२} + २कोज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{अ}{२}$

(अनुच्छेद ७·७ से)

$= २कोज्या \frac{५अ}{२} \left( कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)$

∴ दत्त पदसंहति

$$= \frac{२ज्या \frac{५अ}{२} \left( कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)}{२कोज्या \frac{५अ}{२} \left( कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)}$$

$= स्प \frac{५अ}{२}$

# प्रश्नावलि १०

(१) यदि ज्या क $= \frac{१}{\sqrt{२}}$ और ज्या ख $= \frac{१}{\sqrt{३}}$ तो

स्प $\left(\frac{क+ख}{२}\right)$·कोस्प$\left(\frac{क-ख}{२}\right)$ की अर्हा निश्चित करो।

[कलकत्ता १८७५

सिद्ध करो—

(२) $\frac{\text{कोज्या २क} - \text{कोज्या ४क}}{\text{ज्या ४क} - \text{ज्या२क}} = \text{स्प३क}$

[कलकत्ता १८९३

(३) $\frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}} = \text{स्प}\frac{क+ख}{२}$

[कलकत्ता १८७३

(४) कोज्या क + कोज्या (१२०° + क)

+ कोज्या(१२०° − क) = ०

[कलकत्ता १९१७

(५) $\frac{\text{ज्या३अ} - \text{२ज्या७अ} + \text{ज्या११अ}}{\text{कोज्या३अ} - \text{२कोज्या ७अ} + \text{कोज्या ११अ}} = \text{स्प ७अ}$

(६) कोज्या२क + कोज्या ४क + कोज्या ६क + कोज्या ८क
$=$ ४कोज्या क·कोज्या २क·कोज्या ५क

[कलकत्ता १८८७

(७) ज्या १०° + ज्या २०° + ज्या ४०° + ज्या ५०°
$=$ ज्या ७०° + ज्या ८०°

(८) कोज्या ५५° + कोज्या ६५° + कोज्या १७५° = ०

[कलकत्ता १८९६

(९) स्प ७०° = २ स्प ५०° + स्प २०° [बनारस १९४४

(१०) ज्या २०°·ज्या ४०°·ज्या ६०°·ज्या ८०° $= \frac{३}{१६}$

[नागपुर १९३६

(११) कोज्या १५° − ज्या १५° $= \frac{१}{\sqrt{२}}$ [बनारस १९३८

(१२) स्प $\frac{क + ख}{२}$ + स्प $\frac{क - ख}{२} = \frac{२ \text{ ज्या क}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}}$

[बनारस १९३९

(१३) यदि व्युज्ज्या क + व्युत्कोज्या क
$=$ व्युज्ज्या ख + व्युत्कोज्या ख तो दिखाओ कि

स्पक·स्पख = कोस्प $\left(\frac{क + ख}{२}\right)$

[पटना १९३६

(१४) यदि, $\frac{\text{स्प अ}}{\text{य}} = \frac{\text{स्प आ}}{\text{र}} = \frac{\text{स्प इ}}{\text{ल}}$ हो तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{\text{र}+\text{ल}}{\text{र}-\text{ल}}\right)\text{ज्या}^2\,(\text{आ}-\text{इ}) + \left(\frac{\text{ल}+\text{य}}{\text{ल}-\text{य}}\right)\text{ज्या}^2\,(\text{इ}-\text{अ}) + \left(\frac{\text{य}+\text{र}}{\text{य}-\text{र}}\right)\text{ज्या}^2\,(\text{अ}-\text{आ}) = 0$$

[ बनारस १९२७

(१५) सिद्ध करो—

$$\frac{\text{ज्या}\,११\,\text{क}\cdot\text{ज्या}\,\text{क} + \text{ज्या}\,७\,\text{क}\cdot\text{ज्या}\,३\,\text{क}}{\text{कोज्या}\,११\,\text{क}\cdot\text{ज्या}\,\text{क} + \text{कोज्या}\,७\,\text{क}\cdot\text{ज्या}\,३\,\text{क}} = \text{स्प}\,८\,\text{क}$$

[पंजाब १९१२

(१६) $$\text{कोज्या}\,२\,\text{अ}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{\text{अ}}{२} - \text{कोज्या}\,\text{अ}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{७\,\text{अ}}{२} = \text{ज्या}\,३\,\text{अ}\cdot\text{ज्या}\,\frac{३\,\text{अ}}{२}$$

(१७) $$\text{ज्या}\,\frac{११\,\text{अ}}{४}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{अ}}{४} + \text{ज्या}\,\frac{७\,\text{अ}}{४}\cdot\text{ज्या}\,\frac{३\,\text{अ}}{४} = \text{ज्या}\,२\,\text{अ}\cdot\text{ज्या}\,\text{अ}$$

[कलकत्ता १९०४

(१८) $$\text{ज्या}\,\frac{\text{क}-\text{ख}-\text{ग}}{२}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} + \text{ज्या}\,\frac{\text{ख}+\text{क}-\text{ग}}{२}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{ख}+\text{ग}}{२} = \text{ज्या}\,\text{ख}\cdot\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२}$$

[कलकत्ता १८८५

# आठवां अध्याय

## अपवर्त्य और अपवर्तक कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां

### अपवर्त्य (multiple) कोण

८.१ कोण २क की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को क की निष्पत्तियों के पदों में निकालना।

अनुच्छेद ७.१ के सूत्र में यदि ख=क लिखा जाय तो,

ज्या २ क=ज्या क·कोज्या क+कोज्या क·ज्याक

$\quad$ = २ ज्या क·कोज्या क........................(१)

कोज्या २क=कोज्या क·कोज्या क − ज्याक·ज्याक

$\quad$ =कोज्या$^{२}$ क − ज्या$^{२}$ क

अब कोज्या$^{२}$क − ज्या$^{२}$क=कोज्या$^{२}$क − (१ − कोज्या$^{२}$क)

$\quad$ =२कोज्या$^{२}$क − १

$\quad$ =२ (१ − ज्या$^{२}$क) − १

$\quad$ =१ − २ ज्या$^{२}$क

इसलिए कोज्या२क=कोज्या$^{२}$क − ज्या$^{२}$क

$\quad$ =२ कोज्या$^{२}$क − १

$\quad$ =१ − २ज्या$^{२}$क ..................(२)

पुनः, $\text{स्प } २ \text{ क} = \dfrac{\text{ज्या } २ \text{ क}}{\text{कोज्या } २ \text{ क}}$

$$= \frac{२ \text{ ज्या क} \cdot \text{कोज्या क}}{\text{कोज्या}^{२} \text{ क} - \text{ज्या}^{२} \text{क}}$$

अंश और हर दोनों को कोज्या$^{२}$क से भाग देने पर,

$$\text{स्प } २ \text{ क} = \frac{२ \text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^{२} \text{क}} \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots (३)$$

अनुच्छेद ७·२ के सूत्र (१) में यदि ख = क लिखा जाय तो भी सूत्र (३) प्राप्त हो सकता है।

$$\text{इस प्रकार} \quad \text{स्प} २ \text{ क} = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प क}}{१ - \text{स्प क} \cdot \text{स्प क}}$$

$$= \frac{२ \text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^{२} \text{क}}$$

उपप्रमेय— सूत्र (२) से

$$१ + \text{कोज्या } २ \text{ क} = २ \text{ कोज्या}^{२} \text{क}$$

$$\text{और, } १ - \text{कोज्या } २ \text{ क} = २ \text{ ज्या}^{२} \text{क}$$

८·२ कोण ३क की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को क की निष्पत्तियों के पदों में निकालना।

$$\text{ज्या } ३\text{क} = \text{ज्या } (२\text{क} + \text{क})$$
$$= \text{ज्या } २\text{क} \cdot \text{कोज्या क} + \text{कोज्या } २\text{क} \cdot \text{ज्या क}$$
$$= २\text{ज्या क कोज्या क} \cdot \text{कोज्या क} + (\text{कोज्या}^२\text{क} - \text{ज्या}^२\text{क}) \text{ ज्या क}$$
$$= ३\text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या}^२\text{क} - \text{ज्या}^३\text{क}$$
$$= ३\text{ज्या क } (१ - \text{ज्या}^२\text{क}) - \text{ज्या}^३\text{क}$$
$$= ३\text{ज्या क} - ४\text{ज्या}^३\text{क}$$

$$\therefore \text{ज्या}३\text{क} = ३\text{ज्या क} - ४\text{ज्या}^३\text{क} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (४)$$

$$\text{कोज्या}३\text{क} = \text{कोज्या}(२\text{क} + \text{क})$$
$$= \text{कोज्या}२\text{क} \cdot \text{कोज्या क} - \text{ज्या}२\text{क} \cdot \text{ज्या क}$$
$$= (२\text{कोज्या}^२\text{ क} - १) \text{ कोज्या क} - २\text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या क} \cdot \text{ज्या क}$$
$$= २\text{कोज्या}^३\text{ क} - \text{कोज्या क} - २\text{कोज्या क}(१ - \text{कोज्या}^२\text{ क})$$

$$\therefore \text{कोज्या}३\text{क} = ४\text{ कोज्या}^३\text{ क} - ३\text{ कोज्या क} \quad \cdots\cdots (५)$$

$$\text{स्प } ३\text{ क} = \text{स्प } (२\text{ क} + \text{क}) = \frac{\text{स्प } २\text{ क} + \text{स्प क}}{१ - \text{स्प } २\text{क} \cdot \text{स्प क}}$$

$$= \frac{\dfrac{२\text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^२\text{क}} + \text{स्प क}}{१ - \dfrac{२\text{स्प क}}{१ - \text{स्प}^२\text{ क}} \cdot \text{स्प क}}$$

$$= \frac{२\text{ स्प क} + (१ - \text{स्प}^२\text{ क}) \text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^२\text{ क} - २\text{ स्प क} \cdot \text{स्प क}}$$

$$\therefore \quad \text{स्प } 3\text{ क} = \frac{3 \text{ स्प क} - \text{स्प}^3 \text{ क}}{1 - 3 \text{ स्प}^2 \text{ क}} \qquad \ldots\ldots(6)$$

यह स्पष्ट है कि सूत्र (४) और (५) को इस रूप में लिख सकते हैं।

$$\text{ज्या } 3\text{ क} = \text{कोज्या}^3 \text{ क } (3 \text{ स्प क} - \text{स्प}^3 \text{ क})$$

$$\text{कोज्या } 3\text{ क} = \text{कोज्या}^3 \text{ क } (1 - 3 \text{ स्प}^2 \text{ क})$$

८·३ २क की निष्पत्तियां रेखिकीय विधि से निकालना।

आ. ८·१

मान लो ∠गकख = क। कग रेखा के किसी बिंदु म को केंद्र मानकर, मक त्रिज्या का वृत्त खींचो, जो कख और कग को क्रमशः ख और ग में छेदन करे। मख और गख को मिलाओ और कग रेखा पर खच लंब खींचो,

तो, मक = मख = मग,

∠खमग = २क

∠कखग = ९०°

और ∠चखग = ९०° − ∠खगच = क

$$\therefore \quad \text{ज्या } २\text{क} = \text{ज्या खमच} = \frac{\text{खच}}{\text{मख}} = \frac{२\text{खच}}{२\text{मक}} = \frac{२\text{खच}}{\text{कग}}$$

$$= २\frac{\text{खच}}{\text{खक}} \cdot \frac{\text{खक}}{\text{कग}} = २\text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या क}$$

$$\text{कोज्या } २\text{क} = \frac{\text{मच}}{\text{मख}} = \frac{२\text{मच}}{२\text{मख}} = \frac{\text{कच} - \text{चग}}{\text{कग}}$$

$$(\therefore\ २\text{मच} = \text{कच} - \text{चग})$$

$$= \frac{\text{कच}}{\text{कग}} - \frac{\text{चग}}{\text{कग}} = \frac{\text{कच}}{\text{कख}} \cdot \frac{\text{कख}}{\text{कग}} - \frac{\text{चग}}{\text{खग}} \cdot \frac{\text{खग}}{\text{कग}}$$

$$= \text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या क} - \text{ज्या क} \cdot \text{ज्या क}$$

$$= \text{कोज्या}^{२}\text{क} - \text{ज्या}^{२}\text{क}$$

$$\text{स्प } २\text{ क} = \frac{\text{खच}}{\text{मच}} = \frac{२\text{खच}}{२\text{मच}} = \frac{२\text{खच}}{\text{कच} - \text{चग}}$$

$$= \frac{\dfrac{२\text{ खच}}{\text{कच}}}{१ - \dfrac{\text{चग}}{\text{कच}}}$$

$$= \frac{\dfrac{२\text{खच}}{\text{कच}}}{१ - \left(\dfrac{\text{चग}}{\text{चख}}\right)\left(\dfrac{\text{चख}}{\text{कच}}\right)}$$

$$= \frac{२\text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^{२}\text{क}}$$

$$\therefore \quad \text{स्प } ३ \text{ क} = \frac{३ \text{ स्प क} - \text{स्प}^{३} \text{ क}}{१ - ३ \text{ स्प}^{२} \text{ क}} \qquad ......(६)$$

यह स्पष्ट है कि सूत्र (४) और (५) को इस रूप में लिख सकते हैं।

$$\text{ज्या } ३ \text{ क} = \text{कोज्या}^{३} \text{ क } (३ \text{ स्प क} - \text{स्प}^{३} \text{ क})$$

$$\text{कोज्या } ३ \text{ क} = \text{कोज्या}^{३} \text{ क } (१ - ३ \text{ स्प}^{२} \text{ क})$$

८·३ २क की निष्पत्तियां रैखिकीय विधि से निकालना।

आ. ८·१

मान लो ∠गकख = क। कग रेखा के किसी बिंदु म को केंद्र मानकर, मक त्रिज्या का वृत्त खींचो, जो कख और कग को क्रमशः ख और ग में छेदन करे। मख और गख को मिलाओ और कग रेखा पर खच लंब खींचो,

तो, मक = मख = मग,

∠खमग = २क

∠कखग = ९०°

और ∠चखग = ९०° − ∠खगच = क

$\therefore$ ज्या २क = ज्या खमच = $\frac{\text{खच}}{\text{मख}} = \frac{\text{२खच}}{\text{२मक}} = \frac{\text{२खच}}{\text{कग}}$

$= २\frac{\text{खच}}{\text{खक}} \cdot \frac{\text{खक}}{\text{कग}}$ = २ ज्या क कोज्या क

कोज्या २क = $\frac{\text{मच}}{\text{मख}} = \frac{\text{२मच}}{\text{२मख}} = \frac{\text{कच} - \text{चग}}{\text{कग}}$

($\therefore$ २मच = कच − चग)

$= \frac{\text{कच}}{\text{कग}} - \frac{\text{चग}}{\text{कग}} = \frac{\text{कच}}{\text{कख}} \cdot \frac{\text{कख}}{\text{कग}} - \frac{\text{चग}}{\text{खग}} \cdot \frac{\text{खग}}{\text{कग}}$

= कोज्या क कोज्या क − ज्या क ज्या क

= कोज्या$^2$क − ज्या$^2$क

स्प २क = $\frac{\text{खच}}{\text{मच}} = \frac{\text{२खच}}{\text{२मच}} = \frac{\text{२खच}}{\text{कच} - \text{चग}}$

$$= \frac{\frac{\text{२ खच}}{\text{कच}}}{१ - \frac{\text{चग}}{\text{कच}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{२खच}}{\text{कच}}}{१ - \left(\frac{\text{चग}}{\text{चख}}\right)\left(\frac{\text{चख}}{\text{कच}}\right)}$$

$$= \frac{\text{२ स्प क}}{१ - \text{स्प}^2\text{क}}$$

८·३१ उदाहरण १— ज्या ५अ को ज्या अ के पदों में व्यक्त करो।

ज्या ५अ

$$= \text{ज्या } (३\,\text{अ} + २\,\text{अ})$$

$$= \text{ज्या } ३\,\text{अ} \cdot \text{कोज्या } २\,\text{अ} + \text{कोज्या } ३\,\text{अ} \cdot \text{ज्या } २\,\text{अ}$$

$$= (३\,\text{ज्या अ} - ४\,\text{ज्या}^३\,\text{अ})\,(१ - २\,\text{ज्या}^२\,\text{अ})$$
$$+ (४\,\text{कोज्या}^३\,\text{अ} - ३\,\text{कोज्या अ})\; २\,\text{ज्या अ} \cdot \text{कोज्या अ}$$

$$= (३\,\text{ज्या अ} - १०\,\text{ज्या}^३\,\text{अ} + ८\,\text{ज्या}^५\,\text{अ})$$
$$+ २\,\text{ज्या अ} \cdot \text{कोज्या}^२\,\text{अ}\;(४\,\text{कोज्या}^२\,\text{अ} - ३)$$

$$= (३\,\text{ज्या अ} - १०\,\text{ज्या}^३\,\text{अ} + ८\,\text{ज्या}^५\,\text{अ})$$
$$+ २\,\text{ज्या अ}\;(१ - \text{ज्या}^२\,\text{अ})\,(१ - ४\,\text{ज्या}^२\,\text{अ})$$

$$= (३\,\text{ज्या अ} - १०\,\text{ज्या}^३\,\text{अ} + ८\,\text{ज्या}^५\,\text{अ})$$
$$+ २\,\text{ज्या अ}\;(१ - ५\,\text{ज्या}^२\,\text{अ} + ४\,\text{ज्या}^४\,\text{अ})$$

$$= ५\,\text{ज्या अ} - २०\,\text{ज्या}^३\,\text{अ} + १६\,\text{ज्या}^५\,\text{अ}$$

उदाहरण २— सिद्ध करो कि

$$\frac{१ + \text{ज्या } २\,\text{अ} - \text{कोज्या } २\,\text{अ}}{१ + \text{ज्या } २\,\text{अ} + \text{कोज्या } २\,\text{अ}} = \text{स्प अ}$$

[कलकत्ता १९३८

$$\text{वामपक्ष} = \frac{(१ - \text{कोज्या } २\,\text{अ}) + \text{ज्या } २\,\text{अ}}{(१ + \text{कोज्या } २\,\text{अ}) + \text{ज्या } २\,\text{अ}}$$

$$= \frac{२\,\text{ज्या}^२\,\text{अ} + २\,\text{ज्या अ} \cdot \text{कोज्या अ}}{२\,\text{कोज्या}^२\,\text{अ} + २\,\text{ज्या अ} \cdot \text{कोज्या अ}}$$

$$= \frac{२\,\text{ज्या अ}\;(\text{ज्या अ} + \text{कोज्या अ})}{२\,\text{कोज्या अ}\;(\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ})}$$

$$= \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \text{स्प अ} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण— सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{व्युत्कोज्या } ८\text{क} - १}{\text{व्युत्कोज्या } ४\text{क} - १} = \frac{\text{स्प } ८\text{क}}{\text{स्प } २\text{क}}$$

$$\text{वामपक्ष} = \frac{\frac{१}{\text{कोज्या } ८\text{क}} - १}{\frac{१}{\text{कोज्या } ४\text{क}} - १}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } ४\text{क}}{\text{कोज्या } ८\text{क}} \cdot \frac{१ - \text{कोज्या } ८\text{क}}{१ - \text{कोज्या } ४\text{क}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } ४\text{क}}{\text{कोज्या } ८\text{क}} \cdot \frac{२ \text{ ज्या}^{२} ४\text{क}}{२ \text{ ज्या}^{२} २\text{क}}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या } ४\text{क} \cdot \text{कोज्या } ४\text{क}}{\text{कोज्या } ८\text{क}} \cdot \frac{\text{ज्या } ४\text{क}}{२ \text{ ज्या}^{२} २\text{क}}$$

$$= \frac{\text{ज्या } ८\text{क}}{\text{कोज्या } ८\text{क}} \cdot \frac{२ \text{ ज्या } २\text{क} \cdot \text{कोज्या } २\text{क}}{२ \text{ ज्या}^{२} २\text{क}}$$

$$= \text{स्प } ८\text{क} \cdot \frac{\text{कोज्या } २\text{ क}}{\text{ज्या } २\text{ क}}$$

$$= \frac{\text{स्प } ८\text{ क}}{\text{स्प } २\text{ क}} = \text{दक्षिणपक्ष}$$

## प्रश्नावलि ११

(१) स्प ४क को स्पक के पदों में व्यक्त करो

[कलकत्ता १८९८

सिद्ध करो—

(२) $\frac{\text{ज्या २ क}}{\text{१ − कोज्या २क}}$ = कोस्प क

(३) स्प क + कोस्प क = २ व्युज्ज्या २ क

[कलकत्ता १९१८

(४) $\frac{\text{कोज्या २ अ}}{\text{१ + ज्या २ अ}} = \text{स्प } (४५^\circ - \text{अ}) = \frac{\text{१ − ज्या २ अ}}{\text{कोज्या २ अ}}$

(५) कोज्या$^{२}$ क + कोज्या$^{२}$ (६०° + क)

+ कोज्या$^{२}$(६०° − क) = $\frac{३}{२}$

[पटना १९३७

(६) कोस्प क + कोस्प (६०° + क) + कोस्प (१२०° + क)

= ३ कोस्प ३ क

[पटना १९४५

(७) $\frac{\text{१ − स्प}^{२} (४५^\circ - \text{अ})}{\text{१ + स्प}^{२} (४५^\circ - \text{अ})}$ = ज्या २ अ

(८) $\frac{\text{२ ज्या अ}}{\text{ज्या३ अ}} + \frac{\text{स्प अ}}{\text{स्प ३ अ}}$ = १

[बंबई १८९६

(९) ज्या ६क = ४ ज्या २ क · ज्या (६०° + २ क) ×

ज्या (६०° − २ क)

[कलकत्ता १८७३

(१०) ज्या (२स + १) य·ज्या य = ज्या$^{२}$ (स + १)य − ज्या$^{२}$स य

(११) यदि २स्प अ = ३ स्प आ, तो यह दिखाओ कि

$$\text{स्प } (\text{अ} - \text{आ}) = \frac{\text{ज्या २ आ}}{५ - \text{कोज्या २आ}}$$ [कलकत्ता १९४६

सिद्ध करो—

(१२) ४ (कोज्या$^3$क ज्या३क + ज्या$^3$क कोज्या३क) = ३ज्या४क [बनारस १९३५

(१३) कोज्या$^3$क कोज्या ३क + ज्या$^3$क ज्या ३क = कोज्या$^3$ २क [पटना १९४३

(१४) ज्या$^3$क + ज्या$^3$ (१२०° + क) + ज्या$^3$(२४०° + क)

$$= -\frac{३}{४}\text{ज्या ३क}$$ [पटना १९३७

(१५) स्प३क . स्प२क . स्प क = स्प३क − स्प२क − स्प क [पटना १९३७

अपवर्तक (submultiple) कोण

८·३ निम्न लिखित अपवर्त्य कोणों के सूत्र अ की सब मात्राओं के लिए सत्य हैं ।

ज्या२क = २ ज्या क कोज्या क

कोज्या २क = कोज्या$^2$क − ज्या$^2$क = २ कोज्या$^2$क − १

= १ − २ ज्या$^2$क

$$\text{और} \quad \text{स्प २क} = \frac{\text{२ स्प क}}{१ - \text{स्प}^2\text{क}}$$

इसलिए यदि २ क के स्थान पर क और क के स्थान पर $\frac{\text{क}}{२}$ लिखा जाय, तो भी वे सत्य होंगे ।

इस प्रकार निम्न लिखित सूत्र अपवर्तक कोणों के लिए प्राप्त होते हैं।

$$ज्या क = २ ज्या \frac{क}{२} \cdot कोज्या \frac{क}{२}$$

$$कोज्या क = कोज्या^{२} \frac{क}{२} - ज्या^{२} \frac{क}{२} = २ कोज्या^{२} \frac{क}{२} - १$$

$$= १ - २ ज्या^{२} \frac{क}{२} .$$

$$और \quad स्प क = \frac{२ स्प \frac{क}{२}}{१ - स्प^{२} \frac{क}{२}}$$

८·१ अब ज्या क और कोज्या क को स्प $\frac{क}{२}$ के पदों में व्यक्त किया जायगा।

$$ज्या क = २ ज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{क}{२}$$

$$= \frac{२ ज्या \frac{क}{२}}{कोज्या \frac{क}{२}} \cdot कोज्या^{२} \frac{क}{२}$$

$$= २ स्प \frac{क}{२} \cdot \frac{१}{व्युत्कोज्या_{,} \frac{क}{२}}$$

$$= \frac{२ \text{ स्प} \frac{क}{२}}{१ + \text{स्प}^२ \frac{क}{२}}.$$

$$\text{कोज्या } क = \text{कोज्या}^२ \frac{क}{२} - \text{ज्या}^२ \frac{क}{२}$$

$$= \text{कोज्या}^२ \frac{क}{२} - \frac{\text{ज्या}^२ \frac{क}{२}}{\text{कोज्या}^२ \frac{क}{२}} . \text{ कोज्या}^२ \frac{क}{२}$$

$$= \text{कोज्या}^२ \frac{क}{२} \left(१ - \frac{\text{ज्या}^२ \frac{क}{२}}{\text{कोज्या}^२ \frac{क}{२}}\right)$$

$$= \frac{१}{\text{व्युत्कोज्या}^२ \frac{क}{२}} \left(१ - \text{स्प}^२ \frac{क}{२}\right)$$

$$= \frac{१ - \text{स्प}^२ \frac{क}{२}}{१ + \text{स्प}^२ \frac{क}{२}}$$

८·६ ज्या $\frac{क}{२}$, कोज्या $\frac{क}{२}$ और स्प $\frac{क}{२}$ की अर्हाएं कोज्या क के पदों में निकालना।

$$\text{कोज्या } क = २ \text{ कोज्या}^२ \frac{क}{२} - १ = १ - २\text{ज्या}^२ \frac{क}{२}$$

इस सूत्र से

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२} = \pm\sqrt{\frac{१ - \text{कोज्या क}}{२}}$$

$$\text{और, कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२} = \pm\sqrt{\frac{१ + \text{कोज्या क}}{२}}$$

इसलिए

$$\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२} = \pm\sqrt{\frac{१ - \text{कोज्या क}}{१ + \text{कोज्या क}}}$$

८·६१ चिह्नों की संदिग्धता (ambiguity) का स्पष्टीकरण—

जब क की अर्हा दी हुई हो तो यह निश्चित रूप से ज्ञात होता है कि कोण $\frac{\text{क}}{२}$ किस चरण में है और इसलिए ज्या $\frac{\text{क}}{२}$, कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ और स्प $\frac{\text{क}}{२}$ के चिह्न भी निश्चित रूप से मालूम हो जाते हैं। यह आगे दिए गए उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा।

परन्तु यदि क न दिया जाय केवल कोज्या क दिया जाय तो क और अतः $\frac{\text{क}}{२}$ की अनेक अर्हाएं हो सकती हैं, जैसा कि छठवें अध्याय में देखा जा चुका है। इससे ज्या $\frac{\text{क}}{२}$, कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ और स्प $\frac{\text{क}}{२}$ के चिह्नों में संदेह उत्पन्न होता है।

उदाहरण— ज्या $२२\frac{१}{२}^\circ$ और कोज्या $२२\frac{१}{२}^\circ$ निकालो।

क्योंकि कोण $२२\frac{१}{२}^\circ$ प्रथम चरण में रहता है, इसलिए ज्या $२२\frac{१}{२}^\circ$ और कोज्या $२२\frac{१}{२}^\circ$ दोनों धन होते हैं।

$$\therefore \text{ ज्या } २२\frac{१}{२}^\circ = +\sqrt{\frac{१-\text{कोज्या } ४५^\circ}{२}}$$

$$= \sqrt{\frac{१}{२}\left(१-\frac{१}{\sqrt{२}}\right)} = \frac{१}{२}\sqrt{२-\sqrt{२}}$$

$$\text{और कोज्या } २२\frac{१}{२}^\circ = +\sqrt{\frac{१+\text{कोज्या } ४५^\circ}{२}}$$

$$= \sqrt{\frac{१}{२}\left(१+\frac{१}{\sqrt{२}}\right)} = \frac{१}{२}\sqrt{२+\sqrt{२}}$$

८·७ ज्या $\frac{\text{क}}{२}$, कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ और स्प $\frac{\text{क}}{२}$ की अर्हाओं को ज्या क के पदों में निकालना।

$$\text{ज्या क} = २\text{ज्या } \frac{\text{क}}{२} \cdot \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{और, } १ = \text{ज्या}^२ \frac{\text{क}}{२} + \text{कोज्या}^२ \frac{\text{क}}{२}$$

योग और वियोग द्वारा

$$१ + \text{ज्या क} = \left(\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२} + \text{ज्या } \frac{\text{क}}{२}\right)^२ \quad \ldots\ldots(१)$$

$$१ - \text{ज्या क} = \left(\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२} - \text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}\right)^{२} \quad ......(२)$$

(१) और (२) के वर्गमूल निकालने से

$$\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२} + \text{ज्या}\frac{\text{क}}{२} = \pm\sqrt{१ + \text{ज्या क}} \quad ...(३)$$

$$\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२} - \text{ज्या}\frac{\text{क}}{२} = \pm\sqrt{१ - \text{ज्या क}} \quad ..(४)$$

(३) और (४) के योग और वियोग से

$$\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२} = \pm\frac{१}{२}\sqrt{१ + \text{ज्या क}} \pm\frac{१}{२}\sqrt{१ - \text{ज्या क}} \quad (५)$$

$$\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२} = \pm\frac{१}{२}\sqrt{१ + \text{ज्या क}} \mp\frac{१}{२}\sqrt{१ - \text{ज्या क}} \quad (६)$$

(६) को (५) से भाग देने पर स्प $\frac{\text{क}}{२}$ प्राप्त होता है।

८·७१ चिह्नों की संदिग्धता का स्पष्टीकरण—

पूर्वकथनानुसार यदि क न देकर ज्या क दिया जाय तो, छठवें अध्याय के अनुसार, ज्या क की दी हुई अर्हा के लिए क की अर्हाओं की एक श्रेणी बनती है।

अतः $\frac{क}{२}$ दोनों संभाव्य चरणों में से किसी एक में रह सकता है।

$$\text{अब कोज्या}\ \frac{क}{२}+\text{ज्या}\ \frac{क}{२}$$

$$=\sqrt{२}\left(\frac{१}{\sqrt{२}}\ \text{कोज्या}\ \frac{क}{२}+\frac{१}{\sqrt{२}}\ \text{ज्या}\ \frac{क}{२}\right)$$

$$=\sqrt{२}\left(\text{ज्या}\ \frac{\text{व्या}}{४}\cdot\text{कोज्या}\frac{क}{२}\right.$$

$$\left.+\text{कोज्या}\ \frac{\text{व्या}}{४}\ \text{ज्या}\ \frac{क}{२}\right)$$

$$=\sqrt{२}\ \text{ज्या}\left(\frac{\text{व्या}}{४}+\frac{क}{२}\right)$$

इसी प्रकार कोज्या $\frac{क}{२}$ − ज्या $\frac{क}{२}$ = $\sqrt{२}$ ज्या$\left(\frac{\text{व्या}}{४}-\frac{क}{२}\right)$

जब क दिया हो, तो $\frac{\text{व्या}}{४}+\frac{क}{२}$ और $\frac{\text{व्या}}{४}-\frac{क}{२}$, के चरण निश्चित रूप से ज्ञात हो जाते हैं जिससे कोज्या $\frac{क}{२}$ + ज्या $\frac{क}{२}$ और कोज्या $\frac{क}{२}$ − ज्या $\frac{क}{२}$ के चिह्न भी निश्चित रूप से जाने जा सकते हैं। इस प्रकार राशियां ज्या $\frac{क}{२}$ और कोज्या $\frac{क}{२}$ भी निश्चित रूप से ज्ञात हो जाती हैं।

उदाहरण— यदि ज्या $१८° = \frac{\sqrt{५}-१}{४}$ दी हो तो, ज्या ९° और कोज्या ९° निकालो।

यहां क = १८°, जिससे $\frac{क}{२} = ९°$

तो अनुच्छेद ८७ के (३) और (४) संबंध से
कोज्या९° + ज्या ९°

$$= +\sqrt{१+ज्या १८°} = \sqrt{\frac{३+\sqrt{५}}{२}} \quad \text{.. (१)}$$

कोज्या९° − ज्या ९°

$$= +\sqrt{१-ज्या १८°} = \sqrt{\frac{५-\sqrt{५}}{२}} \quad \text{.. (२)}$$

[∠९° के प्रथम चरण में होने के कारण ज्या ९° और कोज्या ९° दोनों धन हैं और इसीलिये कोज्या ९° + ज्या ९° भी धन है, इसी प्रकार यह स्पष्ट है कि कोज्या ९° − ज्या९°
$= \sqrt{२}\ ज्या\left(\frac{प्या}{४} - ९°\right)$ भी धन है।]

(१) और (२) के योग और वियोग से

$$कोज्या९° = \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}} + \sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$$

$$\text{और } ज्या९° = \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}} - \sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$$

९° का लम्बपूर ८१° है इसलिए, ८१° की निष्पत्तियां भी लिखी जा सकती हैं।

८.८ स्प $\frac{क}{२}$ को स्प क के पदों में व्यक्त करना।

सूत्र से, $स्प क = \frac{२ स्प \frac{क}{२}}{१ - स्प^२ \frac{क}{२}}$

अर्थात्, $स्प क \cdot स्प^२ \frac{क}{२} + २ स्प \frac{क}{२} - स्प क = 0$

इसलिए,

$$स्प \frac{क}{२} = \frac{-१ \pm \sqrt{१ + स्प^२ क}}{स्प क}$$

चिह्नों की संदिग्धता का स्पष्टीकरण पिछली दशाओं के समान होगा।

८.९ १८° और ३६° की निष्पत्तियां निकालना।

मानलो क = १८° तो, ५ क = ९०°

$\therefore$ २क = ९०° − ३क

$\therefore$ ज्या २क = कोज्या ३ क

अथवा २ज्या क·कोज्या क = कोज्या क (४कोज्या$^२$क − ३)

क्योंकि कोज्या क अर्थात् कोज्या १८° भी यहाँ शून्य नहीं हो सकती, इसलिए

$२ ज्या\ क = ४\ कोज्या^२ क - ३ = १ - ४\ ज्या^२ क$

अथवा, $४ ज्या^२ क + २ ज्या\ क - १ = ०$

$$\therefore \quad ज्या\ क = \frac{-२ \pm \sqrt{४+१६}}{८}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{५} - १}{४}$$

अब क धन न्यून कोण है इसलिए ऋण अर्हा छोड़ने से

$$ज्या\ १८^\circ = \frac{\sqrt{५}-१}{४}$$

$$\therefore कोज्या\ १८^\circ = + \sqrt{१ - ज्या^२ १८^\circ}$$

$$= \frac{१}{४}\left(\sqrt{१० + २\sqrt{५}}\right)$$

पुनः $कोज्या\ ३६^\circ = १ - २ ज्या^२ १८^\circ$

$$= \frac{१}{४}\left(\sqrt{५} + १\right)$$

$$ज्या\ ३६^\circ = \sqrt{१ - कोज्या^२ ३६^\circ}$$

$$= \frac{१}{४}\left(\sqrt{१० - २\sqrt{५}}\right)$$

उदाहरण— ५४° और ७२° की निष्पत्तियां निकालो।

८·२१ उदाहरण १— यदि $स्प \frac{ई}{२} = \sqrt{\frac{१-न}{१+न}}\ स्प \frac{इ}{२}$ हो,

तो सिद्ध करो कि

$$कोज्या\ इ = \frac{कोज्या\ ई - न}{१ - न\ कोज्या\ ई}$$

अब, $स्प \frac{ई}{२} = \sqrt{\frac{१-न}{१+न}}\ स्प \frac{इ}{२}$

अथवा, $स्प \frac{इ}{२} = \sqrt{\frac{१+न}{१-न}}\ स्प \frac{ई}{२}$

अनुच्छेद ८.५ से,

$$कोज्या\ इ = \frac{१ - स्प^२ \frac{इ}{२}}{१ + स्प^२ \frac{इ}{२}},$$

$$= \frac{१ - \frac{१+न}{१-न} स्प^२ \frac{ई}{२}}{१ + \frac{१+न}{१-न} स्प^२ \frac{ई}{२}}$$

$$= \frac{(१-न) - (१+न)\ स्प^२ \frac{ई}{२}}{(१-न) + (१+न)\ स्प^२ \frac{ई}{२}}$$

$$=\frac{\left(१-\text{स्प}^{२}\frac{\text{ई}}{२}\right)-\text{न}\left(१+\text{स्प}^{२}\frac{\text{ई}}{२}\right)}{\left(१+\text{स्प}^{२}\frac{\text{ई}}{२}\right)-\text{न}\left(१-\text{स्प}^{२}\frac{\text{ई}}{२}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{१-\text{स्प}^{२}\frac{\text{ई}}{२}}{१+\text{स्प}^{२}\frac{\text{ई}}{२}}-\text{न}}{१-\text{न}\dfrac{१-\text{स्प}^{२}\frac{\text{ई}}{२}}{१+\text{स्प}^{२}\frac{\text{ई}}{२}}}$$

$$=\frac{\text{कोज्या ई}-\text{न}}{१-\text{न कोज्या ई}}$$

उदाहरण २— यह दिखाओ कि

$$१=२^{\text{स}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{२}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{३}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{४}}$$

$$\ldots\text{कोज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{\text{स}+१}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{\text{स}+१}}$$

$$\text{ज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२}=२\ \text{ज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{२}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{२}}$$

$$\text{ज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{२}}=२\ \text{ज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{३}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२^{३}}$$

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{३}} = २\,\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{४}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{४}}$$

...................................

इसी प्रकार, $\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{स}} = २\,\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{स+१}}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{स+१}}$

इसलिए सब समीकारों का एक साथ गुणन करने पर

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२} = २^{स}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{२}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{३}} \cdots\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{स+१}}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{स+१}}$$

परंतु $\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२} = १$

$$\therefore\ १ = २^{स}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{२}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{३}} \cdots\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{स+१}}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{२^{स+१}}$$

## प्रश्नावलि १२

(१) यदि अ और आ घन और न्यून हों और यदि $\text{कोज्या अ} = \frac{३}{५}$, और $\text{कोज्या आ} = \frac{१२}{१३}$ तो $\text{ज्या}\,\frac{\text{अ}+\text{आ}}{२}$ निकालो।

(२) यदि स्प क $= \frac{२ म न}{म^२ - न^२}$ हो, तो स्प $\frac{क}{२}$ निकालो।

[कलकत्ता १८८०

(३) (अ) कोस्प $\frac{\pi}{८}$ की अर्हा निकालो।

(आ) यह दिखाओ कि

$$स्प\left(७\frac{१}{२}\right)^{\circ} = (\sqrt{३} - \sqrt{२})(\sqrt{२} - १)$$

(४) यदि अ और आ न्यून कोण हों तथा

कोज्या २ अ $= \frac{३ \text{ कोज्या } २ \text{ आ} - १}{३ - \text{कोज्या } २ \text{ आ}}$ हो, तो यह

दिखाओ कि स्प अ $= \sqrt{२}$ स्प आ

[कलकत्ता १९४१

(५) यदि स्प अ = कोज्या २ इ, तो सिद्ध करो कि

ज्या २ अ $= \frac{१ - स्प^४ इ}{१ + स्प^४ इ}$

[कलकत्ता १८७९

सिद्ध करो—

(६) (कोज्या इ + कोज्या ई)$^२$ + (ज्या इ + ज्या ई)$^२$

$$= ४ \text{ कोज्या}^२\left(\frac{इ - ई}{२}\right)$$

(७) (कोज्या इ − कोज्या ई)$^२$ + (ज्या इ − ज्या ई)$^२$

$$= ४ \text{ ज्या}^२\left(\frac{इ - ई}{२}\right)$$

(८) $\frac{२ \text{ ज्या क} - \text{ज्या } २ \text{क}}{२ \text{ ज्या क} + \text{ज्या } २ \text{क}} = \text{स्प}^{२} \frac{\text{क}}{२}$ [कलकत्ता १८६२

(९) $\frac{\text{कोस्प}^{४} \frac{\text{क}}{२} - १}{\text{कोस्प}^{४} \frac{\text{क}}{२} + १} = \frac{२ \text{ कोज्या क}}{१ + \text{कोज्या}^{२} \text{ क}}$ [कलकत्ता १८६९

(१०) (अ) $\text{कोज्या}^{४} \frac{\text{प्या}}{८} + \text{कोज्या}^{४} \frac{३\text{प्या}}{८} + \text{कोज्या}^{४} \frac{५\text{प्या}}{८} + \text{कोज्या}^{४} \frac{७\text{प्या}}{८} = \frac{३}{२}$

(आ) $\text{ज्या}^{४} \frac{\text{प्या}}{८} + \text{ज्या}^{४} \frac{३\text{प्या}}{८} + \text{ज्या}^{४} \frac{५\text{प्या}}{८} + \text{ज्या}^{४} \frac{७\text{प्या}}{८} = \frac{३}{२}$

[बनारस १९२७

(११) $\left(१ + \text{स्प } \frac{\text{अ}}{२} + \text{व्युत्कोज्या} \frac{\text{अ}}{२}\right) \times \left(१ + \text{स्प} \frac{\text{अ}}{२} - \text{व्युत्कोज्या} \frac{\text{अ}}{२}\right) = \frac{२ \text{ ज्या अ}}{१ + \text{कोज्या अ}}$

(१२) $\text{स्प}^{२} \left(\frac{\text{प्या}}{४} - \frac{\text{क}}{२}\right) = \frac{\text{व्युत्कोज्या क} - \text{स्प क}}{\text{व्युत्कोज्या क} + \text{स्प क}}$

(१३) व्युज्ज्या $\left(\frac{\text{प्या}}{४}+\text{अ}\right)$ व्युत्कोज्या $\left(\frac{\text{प्या}}{४}-\text{अ}\right)$

$$=\frac{२}{(\text{कोज्या अ}+\text{ज्या अ})^{२}}$$

(१४) $\text{ज्या क}=\text{ज्या}(३६^\circ+\text{क})-\text{ज्या}(३६^\circ-\text{क})$
$-\text{ज्या}(७२^\circ+\text{क})+\text{ज्या}(७२^\circ-\text{क})$

[नागपुर १९४३

(१५) यदि व्युत्कोज्या (क + ख) + व्युत्कोज्या (क − ख)
= २ व्युत्कोज्या क हो तो

सिद्ध करो कि $\text{कोज्या ख}=\sqrt{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}$

[पटना १९४४

(१६) यदि $\text{कोज्या अ}=\frac{\text{कोज्या इ}-\text{कोज्या ई}}{१-\text{कोज्या इ कोज्या ई}}$ हो तो

सिद्ध करो कि $\text{स्प}\frac{\text{अ}}{२}$ की एक अर्हा $\text{स्प}\frac{\text{इ}}{२}\cdot\text{कोस्प}\frac{\text{ई}}{२}$ है।

[पटना १९५२

## नवाँ अध्याय

## ऐकात्म्य और त्रिकोणमितीय समीकार

९.१ तीन कोणों का योग-प्रमेय—

अब, ज्या (क+ख+ग), कोज्या (क+ख+ग) और स्प (क+ख+ग) के विस्तार (expansions) निश्चित किए जायेंगे।

(१) ज्या (क+ख+ग)

$$= \text{ज्या } (\overline{\text{क}+\text{ख}}+\text{ग})$$

$$= \text{ज्या (क+ख) कोज्या ग} + \text{कोज्या (क+ख) ज्या ग}$$

$$= (\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}) \text{ कोज्या ग}$$

$$+ (\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}) \text{ ज्या ग}$$

$$= \text{ज्या क कोज्या ख कोज्या ग}$$

$$+ \text{ज्या ख} \cdot \text{कोज्या ग} \cdot \text{कोज्या क}$$

$$+ \text{ज्या ग} \cdot \text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या ख}$$

$$- \text{ज्या क} \cdot \text{ज्या ख} \cdot \text{ज्या ग}$$

इस सूत्र को इस रूप में लिख सकते हैं—

$$\text{ज्या (क+ख+ग)} = \text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या ख कोज्या ग} \times$$

$$[\text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग} - \text{स्प क}.\text{स्प ख}.\text{स्प ग}]$$

(२) कोज्या (क + ख + ग)

$=$ कोज्या $\overline{(क + ख + ग)}$

$=$ कोज्या (क + ख) कोज्या ग $-$ ज्या (क + ख) ज्या ग

$=$ (कोज्या क कोज्या ख $-$ ज्या क ज्या ख) कोज्या ग

$-$ (ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख) ज्या ग

$=$ कोज्या क·कोज्या ख·कोज्या ग $-$ कोज्या क·ज्या ख·ज्या ग

$-$ कोज्या ख·ज्या ग·ज्या क $-$ कोज्या ग·ज्या क·ज्या ख

इस सूत्र को इस रूप में लिख सकते हैं।

कोज्या (क + ख + ग) $=$ कोज्या क·कोज्या ख·कोज्या ग $\times$

[१ $-$ स्प ख·स्प ग $-$ स्प ग·स्प क $-$ स्प क·स्प ख]

(३) स्प (क + ख + ग) $=$ स्प $\overline{(क + ख + ग)}$

$$= \frac{\text{स्प (क + ख) + स्प ग}}{\text{१ − स्प (क + ख) स्प ग}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{स्प क + स्प ख}}{\text{१ − स्प क·स्प ख}} + \text{स्प ग}}{\text{१} - \dfrac{\text{स्प क + स्प ख}}{\text{१ − स्प क स्प ख}}\cdot\text{स्प ग}}$$

$$= \frac{\text{स्प क + स्प ख + स्प ग − स्प क· स्प ख· स्प ग}}{\text{१ − स्प ख·स्प ग − स्प ग·स्प क − स्प क·स्प ख}}$$

उपप्रमेय— यदि क + ख + ग $=$ १८०° तो स्प (क + ख + ग) $=$ ०। अतः स्प (क + ख + ग) के विस्तार में अंश शून्य सम होना चाहिए।

इसलिए इस दशा में

$$\text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग} = \text{स्प क} \cdot \text{स्प ख} \cdot \text{स्प ग}$$

९·२ यदि कोण क, ख और ग का योग १८०° हो, तो उनकी त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के अनेक ऐकात्मिक संबंध प्रतिपादित (established) किए जा सकते हैं।

इन सम्बन्धों की उपपत्ति की रीति आगे दिए उदाहरणों से भली भांति समझी जा सकती है।

उदाहरण १— यदि क, ख और ग किसी त्रिभुज के तीन कोण हों तो सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}$$

$$= ४\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

$$\text{वामपक्ष} = (\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}) + \text{ज्या ग}$$

$$= २\text{ज्या}\frac{\text{क}+\text{ख}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{क}-\text{ख}}{२} + २\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\text{कोज्या}\ \frac{\text{ग}}{२}$$

क्योंकि $\text{क} + \text{ख} + \text{ग} = १८०^\circ$

$$\therefore\ \frac{\text{क}+\text{ख}}{२} = ९०^\circ - \frac{\text{ग}}{२}$$

$$\therefore\ \text{ज्या}\frac{\text{क}+\text{ख}}{२} = \text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

$$\text{और}\ \ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}+\text{ख}}{२} = \text{ज्या}\ \frac{\text{ग}}{२}$$

$\therefore$ वामपक्ष $= २\text{कोज्या}\,\frac{ग}{२}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{क-ख}{२}$

$$+२\text{कोज्या}\,\frac{क+ख}{२}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{ग}{२}$$

$$=२\text{कोज्या}\,\frac{ग}{२}\left(\text{कोज्या}\,\frac{क-ख}{२}+\text{कोज्या}\,\frac{क+ख}{२}\right)$$

$$=२\text{कोज्या}\,\frac{ग}{२}\left(२\text{कोज्या}\,\frac{क}{२}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{ख}{२}\right)$$

$$=४\text{कोज्या}\,\frac{क}{२}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{ख}{२}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{ग}{२}$$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण २— यदि क + ख + ग = १८०° तो सिद्ध करो कि

कोज्या २क + कोज्या २ख + कोज्या २ग

= −१ − ४कोज्या क.कोज्या ख.कोज्या ग

वामपक्ष = (कोज्या२क + कोज्या२ख) + कोज्या २ग

= २ कोज्या (क + ख) कोज्या (क − ख)

+ २कोज्या²ग − १

परन्तु, क + ख = १८०° − ग

$\therefore$ कोज्या (क + ख) = − कोज्या ग

$\therefore$ वामपक्ष

= − २कोज्या ग कोज्या (क − ख) + २ कोज्या²ग − १

= २कोज्या ग {− कोज्या(क − ख) + कोज्या ग} − १

$= २$ कोज्या ग $\{ -$ कोज्या (क $-$ ख)

$-$ कोज्या (क $+$ ख)$\} - १$

$= २$ कोज्या ग ($- २$कोज्या क कोज्या ख) $- १$

$= - १ - ४$कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग

$=$ दक्षिण पक्ष

उदाहरण ३— यदि क $+$ ख $+$ ग $= १८०^\circ$ तो सिद्ध करो कि

कोज्या$^२$ क $+$ कोज्या$^२$ख $-$ कोज्या$^२$ग

$= १ - २$ज्या क.ज्या ख.कोज्या ग

वामपक्ष $= \frac{१}{२}$ (२ कोज्या$^२$क $+ २$ कोज्या$^२$ख)

$-$ कोज्या$^२$ग

$= \frac{१}{२}$(१ $+$ कोज्या २ क) $+ \frac{१}{२}$(१ $+$ कोज्या२ख)

$-$ कोज्या$^२$ग

$= १ + \frac{१}{२}$ (कोज्या २क $+$ कोज्या २ख) $-$ कोज्या$^२$ ग

$= १ +$ कोज्या (क $+$ ख) कोज्या (क $-$ ख)

$-$ कोज्या ग कोज्या ग

परन्तु, क $+$ ख $= १८०^\circ -$ ग

$\therefore$ कोज्या (क $+$ ख) $= -$ कोज्या ग

$\therefore$ वामपक्ष $= १ -$ कोज्या ग कोज्या (क $-$ ख)

$+$ कोज्या (क $+$ ख) कोज्या ग

$$= १ - \text{कोज्या } ग \left\{ \text{कोज्या } (क - ख) - \text{कोज्या } (क + ख) \right\}$$

$$= १ - \text{कोज्या } ग \cdot २ \text{ ज्या } क \cdot \text{ज्या } ख$$

$$= १ - २ \text{ ज्या } क \text{ ज्या } ख \cdot \text{कोज्या } ग$$

$$= \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण ४— यदि $क + ख + ग = \pi$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{कोस्प}\frac{क}{२} + \text{कोस्प}\frac{ख}{२} + \text{कोस्प}\frac{ग}{२} = \text{कोस्प}\frac{क}{२} \text{ कोस्प}\frac{ख}{२} \text{ कोस्प}\frac{ग}{२}$$

क्योंकि $क + ख + ग = \pi$,

अतः $\frac{क}{२} + \frac{ख}{२} + \frac{ग}{२} = \frac{\pi}{२}$

$$\therefore \text{स्प}\left(\frac{ख}{२} + \frac{ग}{२}\right) = \text{स्प}\left(\frac{\pi}{२} - \frac{क}{२}\right)$$

अथवा $$\frac{\text{स्प}\frac{ख}{२} + \text{स्प}\frac{ग}{२}}{१ - \text{स्प}\frac{ख}{२} \text{ स्प}\frac{ग}{२}} = \text{कोस्प}\frac{क}{२} = \frac{१}{\text{स्प}\frac{क}{२}}$$

अथवा $$\text{स्प}\frac{क}{२}\left(\text{स्प}\frac{ख}{२} + \text{स्प}\frac{ग}{२}\right) = १ - \text{स्प}\frac{ख}{२} \cdot \text{स्प}\frac{ग}{२}$$

अथवा $\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}\ \text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}+\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}\ \text{स्प}\frac{\text{क}}{2}+\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}\ \text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}=1$

आदिसे अन्ततक $\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{2}\ \text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{2}\ \text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{2}$ से गुणा करने पर

$$\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{2}+\text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{2}+\text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{2}$$

$$=\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{2}\cdot\text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{2}\cdot\text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{2}$$

अन्यथा

$$\text{स्प}\left(\frac{\text{क}}{2}+\frac{\text{ख}}{2}+\frac{\text{ग}}{2}\right)=\text{स्प}\frac{\text{प्या}}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}+\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}+\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}-\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}\ \text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}\ \text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}}{1-\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}\ \text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}-\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}-\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}}=\infty$$

इसलिए वामपक्ष का हर शून्य सम होना चाहिए।

$$\therefore\ 1-\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}\cdot\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}-\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}\cdot\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}-\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}\cdot\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}=0$$

अथवा $\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}\cdot\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}+\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}\cdot\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}+\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}\cdot\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}=1$

आदिसे अन्ततक $\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{2}\ \text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{2}\ \text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{2}$ से गुणा करने पर अपेक्षित फल प्राप्त होता है।

# प्रश्नावलि १३

(१) यदि क + ख + ग = १८० तो सिद्ध करो कि

ज्या२क + ज्या२ख + ज्या२ग = ४ज्या क ज्या ख ज्या ग

[बनारस १९४२

(२) कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग

$$= १ + ४\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{ख}}{२}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{ग}}{२}$$

(३) कोज्या क + कोज्या ख − कोज्या ग

$$= -१ + ४\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{ख}}{२}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{ग}}{२}$$

(४) कोज्या²क + कोज्या²ख + कोज्या²ग

= १ − २कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग

[नागपुर १९४०

(५) ज्या²क + ज्या²ख + ज्या²ग

= २ + २कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग

[बनारस १९४०

(६) ज्या²क + ज्या²ख − ज्या²ग = २ज्याक ज्याख कोज्याग

[बनारस १९४३

(७) $\text{ज्या}^2\frac{\text{क}}{2}+\text{ज्या}^2\frac{\text{ख}}{2}+\text{ज्या}^2\frac{\text{ग}}{2}$

$$=1-2\text{ज्या}\frac{\text{क}}{2}\,\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{2}\,\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{2}$$

[पटना १९४२

(८) $\text{ज्या}^2\frac{\text{क}}{2}+\text{ज्या}^2\frac{\text{ख}}{2}-\text{ज्या}^2\frac{\text{ग}}{2}$

$$=1-2\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{2}\,\text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{2}\,\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{2}$$

[नागपुर १९४४

(९) $\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}+\text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{2}+\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{2}$

$$=4\text{कोज्या}\,\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2}\,\text{कोज्या}\frac{\text{ग}+\text{क}}{2}\,\text{कोज्या}\frac{\text{क}+\text{ख}}{2}$$

[इलाहाबाद १९३९

(१०) $\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}+\text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{2}-\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{2}$

$$=4\text{कोज्या}\,\frac{\pi+\text{क}}{4}\,\text{कोज्या}\frac{\pi+\text{ख}}{4}\,\text{कोज्या}\,\frac{\pi-\text{ग}}{4}$$

[पटना १९४२

(११) $\text{ज्या}\frac{\text{क}}{2}+\text{ज्या}\,\frac{\text{ख}}{2}+\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{2}-1$

$$=4\text{ज्या}\frac{\pi-\text{क}}{4}\,\text{ज्या}\,\frac{\pi-\text{ख}}{4}\,\text{ज्या}\,\frac{\pi-\text{ग}}{4}$$

[पटना १९४१

(१२) ज्या (ख + ग − क) + ज्या (ग + क − ख)
+ ज्या (क + ख − ग) = ४ज्या क·ज्या ख·ज्या ग
[इलाहाबाद १९४०

(१३) $\frac{\text{कोज्या (ख − ग)}}{\text{ज्या ख·ज्या ग}} + \frac{\text{कोज्या (ग − क)}}{\text{ज्या ग·ज्या क}}$
$+ \frac{\text{कोज्या (क − ख)}}{\text{ज्या क·ज्या ख}} = ४$
[नागपुर १९४१

(१४) कोस्प ख कोस्प ग + कोस्प ग कोस्प क
+ कोस्प क कोस्प ख = १

(१५) यदि, क + ख + ग = $\frac{\text{प्या}}{२}$ तो सिद्ध करो कि

(अ) कोस्प क + कोस्प ख + कोस्प ग
= कोस्प क कोस्प ख कोस्प ग

(आ) ज्या²क + ज्या²ख + ज्या²ग
+ २ज्याक·ज्या ख·ज्याग = १
[कलकत्ता १९४२

(इ) $\frac{\text{ज्या२क + ज्या२ख + ज्या२ग}}{\text{ज्या२क − ज्या२ख + ज्या२ग}}$ = कोस्प क·कोस्प ग

(१६) यदि इ + ई = उ तो सिद्ध करो कि
कोज्या²इ + कोज्या²ई − २कोज्या इ·कोज्या ई कोज्या उ
= ज्या²उ
[पटना १९३६

(१७) यदि क + ख + ग = ० हो तो दिखाओ कि

$$\text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग} = \text{स्प क·स्प ख·स्प ग}$$

अत्र सिद्ध करो कि, $\sqrt{3} + \text{स्प } 40^\circ + \text{स्प } 80^\circ$

$$= \sqrt{3}\,\text{स्प } 40^\circ\ \text{स्प } 80^\circ$$

[बनारस १९३५

(१८) यदि (क + ख + ग) = २ह, तो सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या (ह − क).ज्या (ह − ख)} + \text{ज्या (ह − ग).ज्या ह} = \text{ज्या क. ज्या ख}$$

[पटना १९३२

(१९) यदि (य + र + ल) = य र ल, तो सिद्ध करो कि

$$\text{य}(1-\text{र}^2)(1-\text{ल}^2)+\text{र}(1-\text{ल}^2)(1-\text{य}^2)+\text{ल}(1-\text{य}^2)(1-\text{र}^2)=4\text{यरल}$$

(२०) यदि क + ख + ग = π तो सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{ज्या}^2\text{क} & \text{कोस्प क} & 1 \\ \text{ज्या}^2\text{ख} & \text{कोस्प ख} & 1 \\ \text{ज्या}^2\text{ग} & \text{कोस्प ग} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[कलकत्ता १९३१

९·३ क. कोज्या अ + ख. ज्या अ = ग

इस रूप के समीकारों को सिद्ध करना,

जहां $\text{ग} < \sqrt{\text{क}^2 + \text{ख}^2}$

पहली रीतिः— इ की लघुत्तम धन अर्हा लेकर और म को धन मानकर

क = म कोज्या इ,

ख = म ज्या इ रखो।

तो, $त्र = \sqrt{क^2 + ख^2}$

$$ज्या\ इ = \frac{ख}{\sqrt{क^2 + ख^2}}$$

और $कोज्या\ इ = \frac{क}{\sqrt{क^2 + ख^2}}$

क और ख दत्त हैं, इसलिए उनके चिन्ह, इ का चरण निश्चित करते हैं और उनकी अर्हाएं त्र और इ की अर्हाओं को निश्चित करती हैं।

अब दत्त समीकार का

त्र कोज्या (अ − इ) = ग में रूपान्तरण हो जाता है .

$$अथवा\ कोज्या\ (अ - इ) = \frac{ग}{त्र} = \frac{ग}{\sqrt{क^2 + ख^2}}$$

क्योंकि $ग < \sqrt{क^2 + ख^2}$, इसलिए दक्षिण पक्ष महत्ता में १ से छोटा है।

अतः एक लघुत्तम धन कोण ई निश्चय किया जा सकता है जिसकी कोज्या, $\frac{ग}{\sqrt{क^2 + ख^2}}$ (जो एक ज्ञात राशि है) के सम है।

इसलिए कोज्या (अ − इ) = कोज्या ई

इसलिए यदि स शून्य, अथवा धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो, तो

$$अ - इ = २ स \text{ π} \pm ई$$

अथवा, $अ = २ स \text{ π} + इ \pm ई$

दूसरी रीति— दत्त समीकार का साधन $\text{स्प}\frac{अ}{२} = प$ का आदेश करने से भी हो सकता है।

$$\text{क्योंकि ज्या } अ = \frac{२\ \text{स्प}\frac{अ}{२}}{१ + \text{स्प}^२\frac{अ}{२}} = \frac{२प}{१ + प^२}$$

$$\text{और कोज्या } अ = \frac{१ - \text{स्प}^२\frac{अ}{२}}{१ + \text{स्प}^२\frac{अ}{२}} = \frac{१ - प^२}{१ + प^२}$$

(अनुच्छेद ८·२)

इसलिए दत्त समीकार का

$$क\frac{१ - प^२}{१ + प^२} + ख\frac{२ प}{१ + प^२} = ग \text{ में रूपांतरण हो जाता है।}$$

अथवा $प^२ (ग + क) - २ख प + (ग - क) = ०$

क्योंकि यह प का वर्ग समीकार (quadratic equation) है इसलिए इसका समाधान करने वाली प की दो अर्हाएं होंगी। मान लो वे $प_१$ और $प_२$ हैं।

तो $\text{स्प}\frac{\text{अ}}{२} = \text{प}_१$ अथवा $\text{प}_२$ ........................(१)

मान लो समीकार (१) का समाधान करने वाली अ की लघुतम धन अर्हाएं $\text{ई}_१$ और $\text{ई}_२$ हैं।

इसलिए $\text{स्प}\frac{\text{अ}}{२} = \text{स्प ई}_१$, अथवा $\text{स्प ई}_२$

∴ यदि स शून्य अथवा कोई पूर्णांक हो तो $\frac{\text{अ}}{२}$ की सामान्य अर्हा

$\frac{\text{अ}}{२} = \text{स प्या} + \text{ई}_१$, अथवा $\frac{\text{अ}}{२} = \text{स प्या} + \text{ई}_२$ है।

अर्थात् $\text{अ} = २\text{स प्या} + २\text{ई}_१$, अथवा $\text{अ} = २\text{स प्या} + २\text{ई}_२$

उदाहरण— समीकार का साधन करो।

$\text{ज्या अ} + \sqrt{३}\,\text{कोज्या अ} = \sqrt{२}$ [कलकत्ता १९२८

आदि से अन्त तक $\sqrt{(\sqrt{३})^२ + (१)^२}$ अर्थात् २ से भाग देने पर,

$\frac{\sqrt{३}}{२}\text{कोज्या अ} + \frac{१}{२}\text{ज्या अ} = \frac{१}{\sqrt{२}}$

परन्तु $\frac{\sqrt{३}}{२} = \text{कोज्या}\frac{\text{प्या}}{६}$, $\frac{१}{२} = \text{ज्या}\frac{\text{प्या}}{६}$

और $\frac{१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या}\frac{\text{प्या}}{४}$

$\therefore$ कोज्या अ कोज्या$\frac{\text{प्या}}{६}$ + ज्या अ. ज्या$\frac{\text{प्या}}{६}$ = कोज्या$\frac{\text{प्या}}{४}$

अथवा कोज्या $\left(\text{अ} - \frac{\text{प्या}}{६}\right)$ = कोज्या $\frac{\text{प्या}}{४}$

$\therefore$ अ $-\frac{\text{प्या}}{६}$ = २स· प्या $\pm \frac{\text{प्या}}{४}$

$\therefore$ अ = २स. प्या $\pm \frac{\text{प्या}}{४} + \frac{\text{प्या}}{६}$

अर्थात् अ = २स प्या + $\frac{\text{५प्या}}{१२}$

अथवा अ = २स प्या $-\frac{\text{प्या}}{१२}$

९·४ कई त्रिकोणमितीय समीकारों का योग और वियोग प्रमेयों के प्रयोग से साधन किया जा सकता है।

उदाहरण— सिद्ध करो कि

ज्या य + ज्या २ य + ज्या ३ य = ०

अथवा ज्या य + ज्या, ३ य = − ज्या २ य

अथवा २ ज्या २ य कोज्या य = − ज्या २ य

(अनुच्छेद ७·७ से)

$\therefore$ ज्या२य = ० अथवा २ कोज्या य = − १

यदि ज्या २य = ०, तो २य = स. प्या

$\therefore$ य = $\frac{\text{स}}{२}$ प्या

यदि कोज्या य $= -\frac{१}{२}$ अर्थात् कोज्या य $=$ कोज्या $\frac{२ प्या}{३}$

$$\text{तो } य = २ स प्या \pm \frac{२ प्या}{३}$$

$$\text{अतः } य = \frac{स प्या}{२} \text{ अथवा } २ स प्या \pm \frac{२ प्या}{३}$$

## प्रश्नावलि १४

सिद्ध करो कि

(१) ज्या य + कोज्या य = १ [बंबई १९२८

(२) ३ ज्या य + ४ कोज्या य $= २\frac{१}{२}$ $\left(\text{स्प } ३६°५२' = \frac{३}{४}\right)$ [आंध्र १९३३

(३) ज्या य + $\sqrt{३}$ कोज्या य = १ [आंध्र १९४२

(४) व्युत्कोज्या य − १ = ($\sqrt{२}$ − १) स्प य [नागपुर १९४१

(५) व्युज्ज्या य = कोस्प य + $\sqrt{३}$ [नागपुर १९४६

(६) यदि समीकार क कोज्या य + ख ज्या य = ग का समाधान करने वाली य की दो महत्तायें इ और ई हों तो सिद्ध करो कि

$$ज्या\ (इ + ई) = \frac{२ क ख}{क^२ + ख^२}$$

[नागपुर १९..

(७) कोज्या य + कोज्या ३ य + कोज्या ५य = ०

[बनारस १९३०

(८) कोज्या अ + ज्या २ अ − कोज्या३अ = ० [पटना १९३६

(९) कोज्या ३अ + २ कोज्या अ = ० [नागपुर १९२५

(१०) १ + ज्या$^{२}$अ = ३ज्या अ कोज्या अ [नागपुर १९४४

(११) व्युत्कोज्या$^{२}$ $\frac{\text{य}}{\text{२}}$ + व्युज्ज्या$^{२}$ $\frac{\text{य}}{\text{२}}$ = १६ कोस्प य,

[नागपुर १९४१

(१२) स्प अ + व्युत्कोज्या २अ = १ [नागपुर १९४०

(१३) कोज्या ३य + ज्या २य = ० [नागपुर १९४२

(१४) कोज्या ३अ कोज्या २अ = कोज्या अ [नागपुर १९४३

(१५) कोज्या अ + कोज्या २ अ + कोज्या ३ अ = ०

(१६) स्प अ + स्प २ अ + स्प ३ अ = ०

(१७) कोज्या २ य − ज्या २ य = कोज्या य − ज्या य − १

[बनारस १९३८

(१८) कोज्या ३ अ − कोज्या ५ अ = ज्या अ

[बनारस १९३९

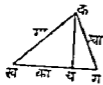
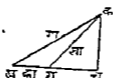
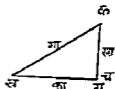
## दसवां अध्याय

# त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में पारस्परिक संबंध

१०·१ अब त्रिभुज की भुजाओं और उसके कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में कुछ संबंध स्थापित किए जायंगे। त्रिभुज के कोण क, ख और ग तथा उनके सम्मुख की भुजाएं क्रमशः का, खा और गा से दर्शाई जाती हैं।

१०·२ ज्या-नियम (law of sines)— प्रत्येक त्रिभुज में कोणों की ज्याएं क्रमशः सामने की भुजाओं की अनुपाती होती हैं।

इस प्रकार △कखग में

$$\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$

आकृति (अ) आकृति (आ) आकृति (इ)

आ. १०.१

मान लो कखग एक त्रिभुज है। क शीर्ष से खग रेखा पर कच लम्ब खींचो।

जैसा आकृतियों से स्पष्ट है, कोण ग के न्यून, अधिक (obtuse angle) अथवा लम्ब कोण होने के अनुसार बिंदु च क्रमशः रेखा खग पर, बर्धित खग पर अथवा अग्र (extremity) ग पर होगा।

क्योंकि कच रेखा, खग रेखा पर लंब है,

अतः प्रत्येक आकृति में,

$$\frac{\text{कच}}{\text{कख}} = \text{ज्या ख},$$

अथवा कच = गा. ज्या ख ........................ (१)

पुनः आकृति (अ) में

$$\frac{\text{कच}}{\text{कग}} = \text{ज्या ग}.$$

अथवा कच = खा. ज्या ग

आकृति (आ) में

$$\frac{\text{कच}}{\text{कग}} = \text{ज्या (कगच)} = \text{ज्या } (१८०^\circ - \text{ग}) = \text{ज्या ग}$$

अथवा इस आकृति में भी,

कच = खा ज्या ग

आकृति (इ) में

कच = कग = खा परन्तु इस आकृति में ग = ९०°

$\therefore$ ज्या ग = १

और $\quad$ कच = खा. ज्या ग

अतः सब आकृतियों में

कच = खा. ज्या ग

(१) और (२) से

गा. ज्या ख = खा. ज्या ग

$$\therefore \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}}$$

$$\text{इसलिए} \quad \frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$

संबंध प्राप्त होता है।

१०·२१ कोटिज्या नियम (law of cosines)—

$\triangle$ *कखग में,*

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{2\text{खा गा}}$$

$$\text{कोज्या ख} = \frac{\text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2}{2\text{ गा का}}$$

$$\text{कोज्या ग} = \frac{\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{2\text{का खा}}$$

पिछले अनुच्छेद की आकृति (अ) से जिसमें ग न्यूनकोण है

$$\text{कख}^2 = \text{खग}^2 + \text{कग}^2 - 2\text{खग. गच}$$

$$= \text{खग}^2 + \text{कग}^2 - 2\text{खग}\cdot\text{कग. कोज्या ग}$$

अथवा $गा^2 = का^2 + खा^2 - 2का.खा$ कोज्या ग

आकृति (आ) से जिसमें ग अधिक कोण है,

$$कख^2 = खग^2 + कग^2 + 2खग.गच$$

$$= खग^2 + कग^2 + 2खग.कग \text{ कोज्या } (180^\circ - ग)$$

$$= खग^2 + कग^2 - 2खग.कग \text{ कोज्या } ग$$

अथवा $गा^2 = का^2 + खा^2 - 2का.खा$ कोज्या ग

यह पिछले फल के समान ही है।

आकृति (इ) से जिसमें ग लंब कोण है,

$$कख^2 = खग^2 + कग^2$$

अथवा $गा^2 = का^2 + खा^2$

परन्तु, क्योंकि ग = ९०°, और कोज्या ग = ०

यह संबंध इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$$गा^2 = का^2 + खा^2 - का.खा.\text{कोज्या } ग$$

इस कारण सब त्रिभुजों के लिये यह संबंध सत्य है।

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि

$$का^2 = खा^2 + गा^2 - 2खा.गा.\text{कोज्या } क$$

और $खा^2 = गा^2 + का^2 - 2गा.का.\text{कोज्या } ख$

इन संबंधों से

$$\text{कोज्या } क = \frac{खा^2 + गा^2 - का^2}{2खा.गा}$$

$$\text{कोज्या } ख = \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{2गा.का}$$

$$\text{कोज्या } ग = \frac{का^2 + खा^2 - गा^2}{2का.खा}$$

१०·३ किसी भी त्रिभुज में
का = खा.कोज्या ग + गा.कोज्या ख
अनुच्छेद १०·२१ से
खा.कोज्या ग + गा.कोज्या ख

$$= \text{खा}.\frac{\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{2\text{का खा}} + \text{गा}.\frac{\text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2}{2\text{गा का}}$$

(अनुच्छेद १०·२१ से)

$$= \frac{\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{2\text{का}} + \frac{\text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2}{2\text{का}}$$

$$= \frac{2\text{का}^2}{2\text{का}} = \text{का}$$

इसी प्रकार खा = गा कोज्या क + का कोज्या ग
और गा = का कोज्या ख + खा कोज्या क

उदाहरण— रैखिकीय विधि से सिद्ध करो कि किसी भी त्रिभुज में का = खा कोज्या ग + गा कोज्या ख

१०·४ अब किसी त्रिभुज के अर्धकोणों की निष्पत्तियां उसकी भुजाओं के पदों में निश्चित की जायगी।

यदि त्रिभुज का सामि-परिमाप (semi-perimeter) सा हो, तो

$$(१) \quad \text{ज्या}\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{खा})(\text{सा}-\text{गा})}{\text{खा गा}}},$$

(२) कोज्या $\frac{क}{२} = \sqrt{\frac{सा\ (सा - का)}{खा\ गा}}$

तथा (३) स्प $\frac{क}{२} = \sqrt{\frac{(सा - खा)\ (सा - गा)}{सा\ (सा - का)}}$

(१) क्योंकि कोज्या क $= \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२\ खा\ गा}$

$$\therefore\ १ - \text{कोज्या क} = १ - \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२\ खा\ गा}$$

$$= \frac{का^२ - (खा^२ + गा^२ - २\ खा\ गा)}{२\ खा\ गा}$$

$$= \frac{का^२ - (खा - गा)^२}{२\ खा\ गा}$$

$$= \frac{(का - खा + गा)\ (का + खा - गा)}{२\ खा\ गा} \ldots (अ)$$

अब २सा = का + खा + गा = त्रिभुज का परिमाप रखने पर

$$का - खा + गा = (का + खा + गा) - २खा$$
$$= २\ सा - २\ खा$$
$$= २\ (सा - खा)$$

$$का + खा - गा = (का + खा + गा) - २\ गा$$
$$= २\ सा - २\ गा$$
$$= २\ (सा - गा)$$

और $१ - \text{कोज्या क} = २ \text{ज्या}^{२} \frac{\text{क}}{२}$

इसलिए सम्बन्ध (अ) इस रूप में लिखा जा सकता है—

$$२\ \text{ज्या}^{२} \frac{\text{क}}{२} = \frac{२ (\text{सा} - \text{खा})\ २ (\text{सा} - \text{गा})}{२\ \text{खा गा}}$$

$$\text{अथवा, ज्या}^{२} \frac{\text{क}}{२} = \frac{(\text{सा} - \text{खा})\ (\text{सा} - \text{गा})}{\text{खा गा}}$$

$$\therefore\ \text{ज्या} \frac{\text{क}}{२} = \pm \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{खा गा}}}$$

क्योंकि किसी भी त्रिभुज में,

सदा क $< १८०^{\circ}$

अतः सदा $\frac{\text{क}}{२} < ९०^{\circ}$

$\therefore$ ज्या $\frac{\text{क}}{२}$, कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$, स्प $\frac{\text{क}}{२}$ की अर्घाएं सदा धन होती हैं। अतः ऊपर के ज्या $\frac{\text{क}}{२}$ के सूत्र में, और कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ और स्प $\frac{\text{क}}{२}$ के सूत्रों में वर्गमूल का चिह्न सदा धन लिया जायगा।

$$\therefore\ \text{ज्या} \frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})\ (\text{सा} - \text{गा})}{\text{खा गा}}}$$

इसी प्रकार ज्या $\frac{ख}{२} = \sqrt{\frac{(सा - गा)(सा - का)}{गा\ का}}$

और ज्या $\frac{ग}{२} = \sqrt{\frac{(सा - का)(सा - खा)}{का\ खा}}$

$$(२)\quad १ + कोज्या\ क = १ + \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२\ खा\ गा}$$

$$= \frac{(खा^२ + गा^२ + २\ खा\ गा) - का^२}{२\ खा\ गा}$$

$$= \frac{(खा + गा)^२ - का^२}{२\ खा\ गा} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(आ)$$

$$= \frac{(खा + गा + का)\ (खा + गा - का)}{२\ खा\ गा}$$

परंतु, $(खा + गा - का) = (का + खा + गा) - २\ का$

$$= २\ सा - २\ का = २\ (सा - का)$$

और $१ + कोज्या\ क = २\ कोज्या^२ \frac{क}{२}$

इसलिए सम्बन्ध (२) इस रूप में लिखा जा सकता है,

$$२ कोज्या^२ \frac{क}{२} = \frac{२\ सा . २\ (सा - का)}{२\ खा\ गा}$$

अथवा $कोज्या^२ \frac{क}{२} = \frac{सा\ (सा - का)}{खा\ गा}$

$$\therefore\ कोज्या\ \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{सा\ (सा - का)}{खा\ गा}}$$

इसी प्रकार कोज्या $\frac{ख}{२} = \sqrt{\frac{सा\ (सा - खा)}{गा\ का}}$

और कोज्या $\frac{ग}{२} = \sqrt{\frac{सा\ (सा - गा)}{का\ खा}}$

(३) क्योंकि स्प $\frac{क}{२} = \frac{ज्या \frac{क}{२}}{कोज्या \frac{क}{२}}$

$$स्प \frac{क}{२} = \frac{\sqrt{\frac{(सा - खा)\ (सा - गा)}{खा\ गा}}}{\sqrt{\frac{सा\ (सा - का)}{खा\ गा}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(सा - खा)\ (सा - गा)}{सा\ (सा - का)}}$$

[ऊपर के फलों से

इसी प्रकार स्प $\frac{ख}{२} = \sqrt{\frac{(सा - गा)\ (सा - का)}{सा\ (सा - खा)}}$

और स्प $\frac{ग}{२} = \sqrt{\frac{(सा - का)(सा - खा)}{सा\ (सा - गा)}}$

१०५ त्रिभुज के किसी भी कोण की ज्या को त्रिभुज की भुजाओं के पदों में व्यक्त करना ।

$$ज्या\ क = २\ ज्या \frac{क}{२}\ कोज्या \frac{क}{२}$$

$$= २\sqrt{\frac{(सा - खा)\,(सा - गा)}{खा\,गा}} \times \sqrt{\frac{सा\,(सा - का)}{खा\,गा}}$$

(गतानुच्छेद से)

$$= \frac{२}{खा\,गा}\sqrt{सा(सा - का)\,(सा - खा)\,(सा - गा)}$$

इसी प्रकार

$$ज्या\,ख = \frac{२}{गा.का}\sqrt{सा(सा - का)(सा - खा)(सा - गा)}$$

और $$ज्या\,ग = \frac{२}{का\,खा}\sqrt{सा(सा - का)\,(सा - खा)\,(सा - गा)}$$

१०.६ किसी भी त्रिभुज कखग में

$$स्प\,\left(\frac{ख - ग}{२}\right) = \left(\frac{खा - गा}{खा + गा}\right) कोस्प\,\frac{क}{२}$$

अब, $स्प\,\left(\frac{ख - ग}{२}\right) स्प\,\frac{क}{२}$

$$= \frac{स्प\frac{ख}{२}स्प\frac{क}{२} - स्प\frac{ग}{२}स्प\frac{क}{२}}{१ + स्प\frac{ख}{२}स्प\frac{ग}{२}}$$

दक्षिण पक्ष

$$= \frac{\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{गा})\,(\text{सा}-\text{का})}{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{खा})}}\;\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{खा})\,(\text{सा}-\text{गा})}{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{का})}}}{१+\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{गा})\,(\text{सा}-\text{का})}{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{खा})}}\;\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{का})\,(\text{सा}-\text{खा})}{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{गा})}}}$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{का})\,(\text{सा}-\text{खा})}{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{गा})}}\;\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{खा})\,(\text{सा}-\text{गा})}{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{का})}}}{१+\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{गा})\,(\text{सा}-\text{का})}{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{खा})}}\;\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{का})\,(\text{सा}-\text{खा})}{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{गा})}}}$$

$$=\frac{\frac{\text{सा}-\text{गा}}{\text{सा}}-\frac{\text{सा}-\text{खा}}{\text{सा}}}{१+\frac{\text{सा}-\text{का}}{\text{सा}}}=\frac{(\text{सा}-\text{गा})-(\text{सा}-\text{खा})}{२\text{सा}-\text{का}}$$

$$=\frac{\text{खा}-\text{गा}}{२\text{सा}-\text{का}}=\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}$$

$$(\because\; २\,\text{सा}=\text{का}+\text{खा}+\text{गा})$$

$$\therefore\; \text{स्प}\left(\frac{\text{ख}-\text{ग}}{२}\right)=\left(\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}\right)\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{२}$$

इसी प्रकार $\text{स्प}\left(\frac{\text{ग}-\text{क}}{२}\right)=\left(\frac{\text{गा}-\text{का}}{\text{गा}+\text{का}}\right)\text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{२}$

$$\text{स्प}\left(\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}\right)=\left(\frac{\text{का}-\text{खा}}{\text{का}+\text{खा}}\right)\text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{२}$$

उदाहरण— $\left(\frac{\text{खा} - \text{गा}}{\text{खा} + \text{गा}}\right)$ को कोणों की निष्पत्तियों के पदों में

व्यक्त कर $\text{स्प}\left(\frac{\text{ख} - \text{ग}}{२}\right) = \left(\frac{\text{खा} - \text{गा}}{\text{खा} + \text{गा}}\right)\text{स्प}\frac{\text{क}}{२}$

आदि संबंधों को सिद्ध करो।

१०.७ त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में कई ऐकात्म्य हैं। भुजाओं को कोणों की निष्पत्तियों के व्यक्त करने से अथवा कोणों की निष्पत्तियों को भुजाओं के पदों में व्यक्त करने से ये ऐकात्म्य सिद्ध किये जा सकते हैं।

उदाहरण १— सिद्ध करो कि △ कखग में,

$$\text{खा}^२\text{ज्या }२\text{ग} + \text{गा}^२\text{ज्या }२\text{ख} = २\text{ खा. गा. ज्या क}$$

$$\text{वाम पक्ष} = २\text{ खा}^२\text{ज्या ग. कोज्या ग} + २\text{ गा}^२\text{ज्या ख. कोज्या ख}$$

$$\text{मान लो } \frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}} = \text{न}$$

अतः ज्या क = का. न, ज्या ख = खा. न, ज्या ग = गा. न

$$\text{तो वामपक्ष} = २\text{ खा}^२\text{. गा. न. कोज्या ग} + २\text{ गा}^२\text{. खा. न. कोज्या ख}$$

$$= २\text{ खा गा न (खा. कोज्या ग + गा. कोज्या ख)}$$

$$= २\text{ खा गा न. का} \quad \text{(अनुच्छेद १०.३ से)}$$

$= २ \text{ खा. गा. } (\text{का. न}) = २ \text{ खा. गा. ज्या क}$
$= \text{दक्षिण पक्ष}$

उदाहरण २— सिद्ध करो कि किसी भी △ कखग में

$$(\text{खा} + \text{गा} - \text{का}) \left( \text{कोस्प} \frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्प} \frac{\text{ग}}{२} \right) = २ \text{ का} \cdot \text{कोस्प} \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{अब कोस्प} \frac{\text{ख}}{२} = \frac{१}{\text{स्प} \frac{\text{ख}}{२}} = \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{खा})}{(\text{सा} - \text{गा}) \ (\text{सा} - \text{का})}}$$

(अनुच्छेद १०·४ से)

$$\text{इसलिए कोस्प} \frac{\text{ग}}{२} = \frac{१}{\text{स्प} \frac{\text{ग}}{२}} = \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{गा})}{(\text{सा} - \text{का}) \ (\text{सा} - \text{खा})}}$$

$$\text{और } (\text{खा} + \text{गा} - \text{का}) = (\text{का} + \text{खा} + \text{गा}) - २ \text{ का}$$
$$= २ \text{ सा} - २\text{का} = २ (\text{सा} - \text{का})$$

$$\therefore (\text{खा} + \text{गा} - \text{का}) \left( \text{कोस्प} \frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्प} \frac{\text{ग}}{२} \right)$$

$$= २ \ (\text{सा} - \text{का}) \left\{ \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{खा})}{(\text{सा} - \text{गा})(\text{सा} - \text{का})}} + \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{गा})}{(\text{सा} - \text{खा}) \ (\text{सा} - \text{का})}} \right\}$$

$$= २ (सा-का) \sqrt{\frac{सा}{(सा-का)}} \times \left\{ \sqrt{\frac{(सा-खा)}{(सा-गा)}} + \sqrt{\frac{(सा-गा)}{(सा-खा)}} \right\}$$

$$= २ \sqrt{सा(सा-का)} \times \frac{(सा-खा) + (सा-गा)}{\sqrt{(सा-खा)\ (सा-गा)}}$$

$$= २ \sqrt{सा\ (सा-का)} \times \frac{का}{\sqrt{(सा-खा)(सा-गा)}}$$

$$= २का\ कोस्प \frac{क}{२}$$

अन्यथा

भुजाओं को कोणों की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करने से भी यह ऐकात्म्य सिद्ध किया जा सकता है।

अनुच्छेद १०·२ से

$$\frac{खा+गा-का}{२का} = \frac{ज्या\,ख + ज्या\,ग - ज्या\,क}{२ज्या\,क}$$

$$= \frac{२ज्या\frac{ख+ग}{२}कोज्या\frac{ख-ग}{२} - २\,ज्या\frac{क}{२}कोज्या\frac{क}{२}}{२ज्या\,क}$$

परन्तु $\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2} = \frac{\text{π}}{2} - \frac{\text{क}}{2}$

$\therefore$ ज्या $\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2} = \text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}$

और ज्या$\frac{\text{क}}{2} = \text{कोज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2}$

$$\therefore \frac{\text{खा}+\text{गा}-\text{का}}{2\text{का}}$$

$$= \frac{2\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}\text{कोज्या}\frac{\text{ख}-\text{ग}}{2} - 2\text{कोज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}}{2\text{ज्या क}}$$

$$= \frac{2\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}\left(\text{कोज्या}\frac{\text{ख}-\text{ग}}{2} - \text{कोज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2}\right)}{4\text{ज्या}\frac{\text{क}}{2}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}}$$

$$= \frac{2\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}\cdot 2\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{2}\cdot\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{2}}{4\,\text{ज्या}\frac{\text{क}}{2}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{2}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{2}}{\text{ज्या}\frac{\text{क}}{2}}$$

और $\dfrac{\text{कोस्प}\,\frac{\text{क}}{2}}{\text{कोस्प}\,\frac{\text{ख}}{2} + \text{कोस्प}\,\frac{\text{ग}}{2}}$

$$= \frac{\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{2}\ \text{ज्या}\,\frac{\text{ख}}{2}\ \text{ज्या}\,\frac{\text{ग}}{2}}{\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{2}\left(\text{ज्या}\,\frac{\text{ग}}{2}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{ख}}{2} + \text{कोज्या}\,\frac{\text{ग}}{2}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{ख}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{2}\ \text{ज्या}\,\frac{\text{ख}}{2}\ \text{ज्या}\,\frac{\text{ग}}{2}}{\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{2}\ \text{ज्या}\,\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{2}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{ख}}{2}\ \text{ज्या}\,\frac{\text{ग}}{2}}{\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{2}\,\text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{2}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}\,\frac{\text{ख}}{2}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{ग}}{2}}{\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{2}}$$

इसलिए $\dfrac{\text{खा}+\text{गा}-\text{का}}{2\,\text{का}} = \dfrac{\text{कोस्प}\,\frac{\text{क}}{2}}{\text{कोस्प}\,\frac{\text{ख}}{2} + \text{कोस्प}\,\frac{\text{ग}}{2}}$

अतः एव (खा + गा − का) $\left(\text{कोस्प}\,\frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्प}\,\frac{\text{ग}}{२}\right)$

$$= २\,\text{का}.\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{क}}{२}$$

उदाहरण ३— यदि $\text{का}^२$, $\text{खा}^२$, और $\text{गा}^२$ समांतर श्रेढी में हो तो सिद्ध करो कि कोस्प क, कोस्प ख और कोस्प ग की अर्हाएं भी समांतर श्रेढी में होंगी।

यह सिद्ध करना है कि

कोस्प ख − कोस्प क = कोस्प ग − कोस्प ख

अथवा कोस्प क + कोस्प ग = २कोस्प ख

और यह तब सत्य होगा

$$\text{जब}\quad \frac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या क}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{ज्या ग}} = २.\frac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{अर्थात् जब}\quad \frac{\text{कोज्या क}}{\text{का}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{गा}} = \frac{२\text{कोज्या ख}}{\text{खा}}$$

(अनुच्छेद १०·२ से)

$$\text{अर्थात् जब}\quad \frac{\text{गा. कोज्या क + का. कोज्या ग}}{\text{का. गा}} = \frac{२\text{कोज्या ख}}{\text{खा}}$$

$$\text{अर्थात् जब}\quad \frac{\text{खा}}{\text{का. गा}} = \frac{२\text{कोज्या ख}}{\text{खा}}$$ (अनुच्छेद १०·३ से)

अर्थात् जब $\text{खा}^२ = २\,\text{का. गा. कोज्या ख}$

अर्थात् जब $\text{खा}^२ = \text{गा}^२ + \text{का}^२ - \text{खा}^२$

(अनुच्छेद १०·२१ से)

अर्थात् जब $२\text{खा}^२ = \text{गा}^२ + \text{का}^२$

$का^2$, $खा^2$ और $गा^2$ समान्तर श्रेढी में हैं अतः यह सम्बन्ध सत्य है।

∴ कोस्प क, कोस्प ख और कोस्प ग समांतर श्रेढी में हैं।

## प्रश्नावलि १५

सिद्ध करो कि किसी भी त्रिभुज कखग में

(१) का कोज्या $\frac{ख-ग}{२}$ = (खा + गा) ज्या $\frac{क}{२}$

(२) $\frac{का^2 \text{ ज्या } (ख-ग)}{\text{ज्या क}} + \frac{खा^2 \text{ ज्या } (ग-क)}{\text{ज्या ख}} + \frac{गा^2 \text{ ज्या } (क-ख)}{\text{ज्या ग}} = 0$

[नागपुर १९२६

(३) का.ज्या क − खा.ज्या ख = गा.ज्या (क − ख)

[नागपुर १९४३

(४) यदि अ कोई भी एक कोण हो तो

खा.कोज्या अ = गा.कोज्या (क − अ) + का.कोज्या (क + अ)

[नागपुर १९४२

(५) (का − खा + गा) स्प $\frac{ख}{२}$ = (का + खा − गा) स्प $\frac{ग}{२}$

[नागपुर १९४०

(६) $स्प \frac{ख}{२} \cdot स्प \frac{ग}{२} = \frac{खा + गा - का}{का + गा + खा}$ [नागपुर १९५४

(७) $(का + खा + गा) \left(स्प \frac{क}{२} + स्प \frac{ख}{२}\right) = २ \; गा.कोस्प \frac{ग}{२}$

(८) $का.ज्या \; (ख - ग) + खा.ज्या \; (ग - क)$
$+ गा.ज्या \; (क - ख) = ०$
[बंबई १९३८

(९) $\frac{का^२.ज्या \; (ख - ग)}{ज्या \; ख + ज्या \; ग} + \frac{खा^२ \; ज्या \; (ग - क)}{ज्या \; ग + ज्या \; क}$
$+ \frac{गा^२.ज्या \; (क - ख)}{ज्या \; क + ज्या \; ख} = ०$
[बंबई १९४१

(१०) $\frac{ज्या \; (क - ख)}{ज्या \; (क + ख)} = \frac{का^२ - खा^२}{गा^२}$ [इलाहाबाद १९४१

(११) $(खा - गा) \; कोस्प \frac{क}{२} + (गा - का) \; कोस्प \frac{ख}{२}$
$+ (का - खा) \; कोस्प \frac{ग}{२} = ०$
[पटना १९४५

(१२) $(खा - गा) \; कोज्या \frac{क}{२} = का \; ज्या \frac{ख - ग}{२}$
[पटना १९४२

(१३) यदि त्रिभुज कखग की भुजाएं इस प्रकार हों कि $२ खा^२ = का^२ + गा^२$ तो दिखाओ कि

$$\frac{ज्या ३ ख}{ज्या ख} = \left(\frac{का^२ - गा^२}{२ का.गा}\right)^२$$

[नागपुर १९४६

(१४) यदि त्रिभुज कखग में, का कोज्या क = खा. कोज्या ख, तो सिद्ध करो कि, का = खा, अथवा ग लंबकोण है।

[इलाहाबाद १९४२

(१५) यदि त्रिभुज कखग में, $कोज्या ख = \frac{ज्या क}{२ ज्या ग}$ तो सिद्ध करो कि कखग द्विसमत्रिभुज है।

[बनारस १९४४

(१६) यदि किसी त्रिभुज की भुजाएं समांतर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि उसके अर्धकोणों की कोटिस्पर्शज्याएं भी समांतर श्रेढी में होंगी।

(१७) यदि त्रिभुज कखग में, $स्प \frac{क}{२} = \frac{५}{६}$ और $स्प \frac{ख}{२} = \frac{२०}{३७}$, तो $स्प \frac{ग}{२}$ की अर्हा निश्चित करो और सिद्ध करो कि का + गा = २खा

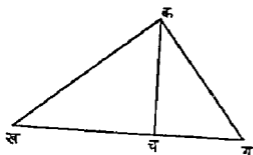
[नागपुर १९४२

(१८) त्रिभुज कखग में, आधार खग पर च एक ऐसा बिंदु है कि $\frac{खच}{चग} = \frac{म}{न}$, और $\angle खकच = इ$, $\angle चकग = ई$ तथा $\angle गचक = अ$, तो सिद्ध करो कि

$$(म+न) \text{ कोस्प } अ = म \text{ कोस्प } इ - न \text{ कोस्प } ई$$
$$= न \text{ कोस्प } ख - म \text{ कोस्प } ग$$

# ग्यारहवां अध्याय

## त्रिभुज के गुणधर्म (properties)

**११·१ त्रिभुज का क्षेत्रफल—**

मान लो चिह्न $\triangle$ से त्रिभुज का क्षेत्रफल दर्शाया गया है। खग रेखा पर कच लंब खींचो।

आ ११.१

$$\text{तो } \triangle = \frac{१}{२}\left(\text{आधार} \times \text{उच्छ्राय}\right)(\text{base} \times \text{altitude})$$

$$= \frac{१}{२}\text{खग.कच}$$

$$= \frac{१}{२}\text{खग.कख ज्या ख}$$

$$= \frac{१}{२}\cdot\text{का.गा.ज्या ख}$$

$$= \frac{१}{२} \text{का.खा.ज्या ग} \quad (\because \text{गा ज्या ख} = \text{खा.ज्या ग})$$

$$= \frac{१}{२} \text{खा.गा.ज्या क} \quad (\because \text{का ज्या ग} = \text{गा.ज्या क})$$

$$\Delta = \frac{१}{२} \text{खा.गा ज्या क} = \frac{१}{२} \text{गा.का ज्या ख} = \frac{१}{२} \text{का.खा ज्या ग}$$

इस प्रकार $\Delta = \frac{१}{२}$(दो भुजाओं का गुणनफल)

× (उनके अंतर्गत कोण की ज्या)

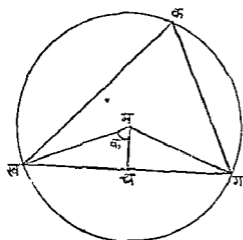
पुनः $\Delta = \frac{१}{२} \text{खा.गा.ज्या क}$

$$= \text{खा.गा.ज्या} \frac{\text{क}}{२} \cdot \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{२}$$

$$= \text{खा.गा.} \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{खा.गा}}} \sqrt{\frac{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}{\text{खा.गा}}}$$

$$= \sqrt{\text{सा.}(\text{सा} - \text{का}) \cdot (\text{सा} - \text{खा}) \cdot (\text{सा} - \text{गा})}$$

यह सूत्र त्रिभुज का क्षेत्रफल भुजाओं के पदों में व्यक्त करता है।

११.२ किसी त्रिभुज के परिलेखी वृत्त (circumscribing circle) की त्रिज्या—

मान लो कि त्रिभुज कखग के परिलेखी वृत्त की त्रिज्या त्र और केन्द्र म है।

आ. ११.२

$\angle$खमग की अर्धन-रेखा (bisecting line) मच खींचो जो रेखा खग का भी लंब कोण पर अर्धन (bisect) करती है।

रैखिकी से केंद्र म पर बना कोण $\angle$खमग

$$= २ \angle \text{खकग}$$
$$= २ \text{क}$$

$$\therefore \angle \text{खमच} = \frac{१}{२} \angle \text{खमग} = \text{क}$$

अब $\quad$ खच = खम.ज्या खमच

परन्तु $\quad$ खच $= \frac{\text{का}}{२}$

और $\quad$ खम = त्र

$$\frac{\text{का}}{२} = \text{त्रा ज्या क}$$

$$\text{त्रा} = \frac{\text{का}}{२\ \text{ज्या क}}$$

$$\text{इसी प्रकार त्रा} = \frac{\text{खा}}{२\ \text{ज्या ख}}$$

$$\text{और त्रा} = \frac{\text{गा}}{२\ \text{ज्या ग}}$$

$$\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}} = २\ \text{त्रा}$$

किसी भी त्रिभुज के परिलेखी वृत्त को परिवृत्त (circum circle), उसके केंद्र को परिकेंद्र (circum centre) और उस की त्रिज्या को परित्रिज्या (circum radius) कहते हैं।

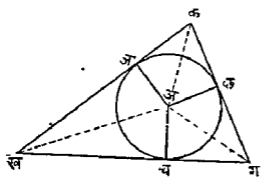
उपप्रमेय — का = २ त्रा ज्या क,
खा = २ त्रा ज्या ख,
गा = २ त्रा ज्या ग

११.२१ परित्रिज्या को भुजाओं के पदों में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\text{त्रा} = \frac{\text{का}}{२\ \text{ज्या क}} = \frac{\text{का खा गा}}{२\ \text{खा गा ज्या क}}$$

$$= \frac{\text{का खा गा}}{४\ \Delta}$$ (अनुच्छेद ११.१ से)

११·३ किसी भी त्रिभुज में अंतर्लिखित वृत्त (inscribed circle) की त्रिज्या निकालना—

आ. ११.२

मान लो कि त्रिभुज कखग में अंतर्लिखित वृत्त का केन्द्र अ है और वृत्त और भुजाओं के संस्पर्श-विंदु (points of contact) च, छ, ज हैं तो अच, अछ, अज रेखाएं त्रिभुज की भुजाओं पर लम्ब होंगी। अब इनमें से प्रत्येक की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या त्र के सम है।

क्योंकि △कखग का क्षेत्रफल

= △खअग, △ गअक और △ कअख के क्षेत्रफलों का योग

$$\therefore \triangle = \frac{1}{2}\text{खग.अच} + \frac{1}{2}\text{गक.अछ} + \frac{1}{2}\text{कख.अज}$$

$$= \frac{1}{2}\text{का.त्र} + \frac{1}{2}\text{खा.त्र} + \frac{1}{2}\text{गा.त्र}$$

$= \frac{1}{२}$ त्र (का + खा + गा)

$=$ त्र. सा (∵ का + खा + गा = २सा)

$\therefore$ त्र $= \frac{\Delta}{\text{सा}}$

त्रिभुज में अंतर्लिखित वृत्त को अंतर्वृत्त (incircle), उसके केन्द्र को अतःकेन्द्र (incentre) और उसकी त्रिज्या को अंतस्त्रिज्या (inradius) कहते हैं।

टिप्पणी— अंतःकेन्द्र से शीर्षों की दूरियां।

$\triangle$ कअज से अक = अज व्युज्ज्या ककज

$\therefore$ अक = त्र. व्युज्ज्या $\frac{\text{क}}{२}$

इसी प्रकार, अख = त्र. व्युज्ज्या $\frac{\text{ख}}{२}$

और अग = त्र. व्युज्ज्या $\frac{\text{ग}}{२}$

११.३१ त्र के अन्य व्यंजक—

गतानुच्छेद की आकृति में, कोणों की अर्धच्छेदी रेखाओं का मिथश्छेदन बिंदु (point of intersection) अ है।

इसलिए $\angle$ अखच $= \frac{\text{ख}}{२}$, $\angle$ अगच $= \frac{\text{ग}}{२}$

∴ त्रिभुज असच और अगच से,

$$खच = त्र \; कोस्प\frac{ख}{२}, \quad गच = त्र \; कोस्प\frac{ग}{२}$$

अब, $खच + गच = खग = का$

$$\therefore \; त्र\left( कोस्प\frac{ख}{२} + कोस्प\frac{ग}{२} \right) = का$$

अथवा $$\frac{त्र\left(कोज्या\frac{ख}{२} ज्या\frac{ग}{२} + कोज्या\frac{ग}{२} ज्या\frac{ख}{२}\right)}{ज्या\frac{ख}{२} ज्या\frac{ग}{२}} = का$$

$$अथवा \; त्र \; ज्या\left(\frac{ख+ग}{२}\right) = का \; ज्या\frac{ख}{२} ज्या\frac{ग}{२}$$

$$परंतु \; \frac{ख+ग}{२} = ९०^\circ - \frac{क}{२}$$

$$\therefore \; ज्या\frac{ख+ग}{२} = कोज्या\frac{क}{२}$$

$$\therefore \; त्र = \frac{का \; ज्या\frac{ख}{२} ज्या\frac{ग}{२}}{कोज्या\frac{क}{२}}$$

$$परंतु \; का = २ \; त्रा \; ज्या \; क = ४ \; त्रा \; ज्या\frac{क}{२} कोज्या\frac{क}{२}$$

$$\therefore \quad अ = ४\ त्रा\ ज्या\frac{क}{२}ज्या\frac{ख}{२}ज्या\frac{ग}{२}$$

वैकल्पिक रीति (alternative method)—

$$अ = \frac{\Delta}{सा} = \frac{२\Delta}{का + खा + गा}$$

$$= \frac{खा\ गा\ ज्या\ क}{का + खा + गा}$$

$$\therefore \quad अ = \frac{२\ त्रा\ ज्या\ ख.\ २\ त्रा\ ज्या\ ग.\ ज्या\ क}{२\ त्रा\ (ज्या\ क + ज्या\ ख + ज्या\ ग)}$$

(अनुच्छेद ११·२, उपप्रमेय)

$$= \frac{२\ त्रा\ ज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ ग}{ज्या\ क + ज्या\ ख + ज्या\ ग}$$

परन्तु अनुच्छेद ९·२ के उदाहरण १ से

ज्या क + ज्या ख + ज्या ग

$$= ४\ कोज्या\frac{क}{२}कोज्या\frac{ख}{२}कोज्या\frac{ग}{२}$$

$$\therefore अ = \frac{१६\ त्रा\ ज्या\frac{क}{२}कोज्या\frac{क}{२}\cdot ज्या\frac{ख}{२}कोज्या\frac{ख}{२}\cdot ज्या\frac{ग}{२}कोज्या\frac{ग}{२}}{४\ कोज्या\frac{क}{२}कोज्या\frac{ख}{२}कोज्या\frac{ग}{२}}$$

$$= ४\ त्रा\ ज्या\frac{क}{२}ज्या\frac{ख}{२}ज्या\frac{ग}{२}$$

११·३२ त्र के लिए एक और व्यंजक—

अनुच्छेद ११·३ की आकृति में, रेखाएं खच और खज, एक ही बिन्दु ख से खींची गईं, अंतर्वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं हैं

$$\therefore \quad \text{खच} = \text{खज}$$

इसी प्रकार $\text{गच} = \text{गछ}$

और $\text{कछ} = \text{कज}$

अब परिमाप $२\text{सा} = (\text{कछ} + \text{कज}) + (\text{खज} + \text{खच}) + (\text{गच} + \text{गछ})$

$$\therefore \quad \text{सा} = \text{कज} + \text{खच} + \text{चग} = \text{कज} + \text{का}$$

$$\therefore \quad \text{कज} = \text{सा} - \text{का}$$

अब त्रिभुज कअज में

$$\frac{\text{अज}}{\text{कज}} = \text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२}$$

$$\therefore \quad \text{त्र} = \text{कज}\ \text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{त्र} = (\text{सा} - \text{का})\ \text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२}$$

इसी प्रकार, $\text{त्र} = (\text{सा} - \text{खा})\ \text{स्प}\,\frac{\text{ख}}{२}$

$$\text{त्र} = (\text{सा} - \text{गा})\ \text{स्प}\,\frac{\text{ग}}{२}$$

वैकल्पिक रीति—

$$त्र = \frac{\Delta}{सा}$$

$$= \frac{\sqrt{सा\,(सा-का)\,(सा-खा)\,(सा-गा)}}{सा}$$

$$= \sqrt{\frac{(सा-का)\,(सा-खा)\,(सा-गा)}{सा}}$$

$$= (सा-का)\sqrt{\frac{(सा-खा)\,(सा-गा)}{सा\,(सा-का)}}$$

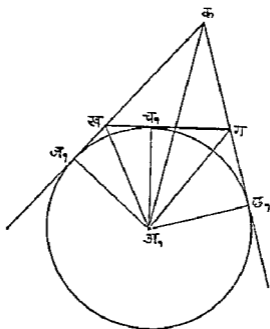
$$= (सा-का)\ स्प\frac{क}{२}$$

इसी प्रकार $त्र = (सा-खा)\ स्प\frac{ख}{२}$

और $त्र = (सा-गा)\ स्प\frac{ग}{२}$

११.४ यदि कोई वृत्त किसी त्रिभुज की एक भुजा का और अन्य दो वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता हो तो वह वृत्त वहिर्लिखित वृत्त (excribed circle) कहलाता है। इस प्रकार प्रत्येक त्रिभुज कखग के तीन वहिर्लिखित वृत्त होते हैं। प्रथम, जो खग भुजा का और कख, कग वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता है; दूसरा जो गक भुजा का और खग, खक

वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता है और तीसरा जो कख भुजा का और गक, गख वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता है। बहिर्लिखित वृत्तों को बहिर्वृत्त (excircles), उनके केन्द्रों को बहिष्केन्द्र (excentres) और उनकी त्रिज्याओं को बहिस्त्रिज्याएं (exradii) कहते हैं।

११.४१ त्रिभुज कखग के बहिर्वृत्तोंकी त्रिज्याएं—

आ. ११·४

मान लो कि जो बहिर्वृत्त खग भुजा का और कख और कग वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता है, उसका केन्द्र अ₁ और

उसकी त्रिज्या $\text{त्र}_1$ है; और इस वृत्त और खग, कग, कख रेखाओं के संस्पर्श विन्दु क्रमशः $\text{च}_1$, $\text{छ}_1$, और $\text{ज}_1$ हैं। इन विन्दुओं को $\text{अ}_1$ से मिलाने वाली रेखाएं क्रमशः इन भुजाओं पर लम्ब होंगी।

और $\text{अ}_1\text{च}_1 = \text{अ}_1\text{छ}_1 = \text{अ}_1\text{ज}_1 = \text{त्र}_1$

अब $\quad \triangle\,\text{कखग} = \triangle\,\text{अ}_1\text{कख} + \triangle\,\text{अ}_1\text{गक} - \triangle\,\text{अ}_1\text{खग}$

$$\text{अथवा}\quad \triangle = \frac{१}{२}\,\text{गा}\,\text{त्र}_1 + \frac{१}{२}\,\text{खा}\,\text{त्र}_1 - \frac{१}{२}\,\text{का}\,\text{त्र}_1$$

$$= \frac{१}{२}\,\text{त्र}_1(\text{गा} + \text{खा} - \text{का})$$

$$= \frac{१}{२}\,\text{त्र}_1(२\text{सा} - २\text{का}) = \text{त्र}_1(\text{सा} - \text{का})$$

$$\therefore \text{त्र}_1 = \frac{\triangle}{\text{सा} - \text{का}}$$

इसी प्रकार यदि कोण ख और ग के सम्मुख वहिर्वृत्तों की त्रिज्याएं क्रमशः $\text{त्र}_2$ और $\text{त्र}_3$ हों, तो

$$\text{त्र}_2 = \frac{\triangle}{\text{सा} - \text{खा}}$$

$$\text{त्र}_3 = \frac{\triangle}{\text{सा} - \text{गा}}$$

टिप्पणीः—बहिर्केंद्रों से शीर्षों की दूरियां

$\triangle$ कअ$_1$ज$_1$ से,

अ$_1$क = अ$_1$ज$_1$ व्युज्ज्या अ$_1$कज$_1$

$$\therefore \text{अ}_1\text{क} = \text{त्र}_1 \text{ व्युज्ज्या } \frac{\text{क}}{२}$$

इसी प्रकार $\text{अ}_1\text{ख} = \text{त्र}_1 \text{ व्युज्ज्या} \frac{\text{ख}}{२}$

$$\text{और } \text{अ}_1\text{ग} = \text{त्र}_1 \text{ व्युत्कोज्या} \frac{\text{ग}}{२}$$

इसी प्रकार कोण ख और ग के सम्मुख बहिर्केन्द्रों अ$_2$, अ$_3$ से शीर्षों की दूरियां निकाली जा सकती हैं।

इसके अतिरिक्त

$$\angle \text{खअ}_1\text{ग} = \angle \text{खअ}_1\text{च}_1 + \angle \text{गअ}_1\text{च}_1$$

क्योंकि खच$_1$अ$_1$ एक लम्बकोण त्रिभुज है,

$$\therefore \angle \text{खअ}_1\text{च}_1 = ९०^\circ - \text{अ}_1\text{खच}_1$$

$$= ९०^\circ - \left(९०^\circ - \frac{\text{ख}}{२}\right)$$

$$= \frac{\text{ख}}{२}$$

इसी प्रकार $\angle \text{गअ}_1\text{च}_1 = \frac{\text{ग}}{२}$

$$\therefore \angle \text{खअ}_1\text{ग} = \frac{\text{ख}}{२} + \frac{\text{ग}}{२}$$

$$= ९०° - \frac{क}{२}$$

इसी प्रकार $\angle ग अ_२ क = ९०° - \frac{ख}{२}$,

और $\angle क अ_३ ख = ९०° - \frac{ग}{२}$

११·४२ बहिस्त्रिज्या के अन्य व्यंजक—

पिछले अनुच्छेद की आकृति में बिंदु $अ_१$ बहिष्कोण (exterior angles) ख और ग के अर्धच्छेदी रेखाओं का मिथश्छेदन बिंदु है।

$$\therefore \quad \angle अ_१ ख च_१ = ९०° - \frac{ख}{२},$$

$$\angle अ_१ ग च_१ = ९०° - \frac{ग}{२}$$

$\triangle अ_१ ख च_१$ से, $ख च_१ = त्र_१ कोस्प\left(९०° - \frac{ख}{२}\right)$

$$= त्र_१ \ स्प \frac{ख}{२}$$

और $\triangle अ_१ ग च_१$ से,

$$ग च_१ = त्र_१ \ कोस्प \left(९०° - \frac{ग}{२}\right) = त्र_१ \ स्प \frac{ग}{२}$$

परंतु $ख च_१ + ग च_१ = ग ख = का$

$$\therefore \quad त्र_१ \left( स्प \frac{ख}{२} + स्प \frac{ग}{२} \right) = का$$

अथवा $अ_1$ ज्या $\left(\frac{ख+ग}{२}\right)$ = का कोज्या $\frac{ख}{२}$ कोज्या $\frac{ग}{२}$

$$\therefore\ अ_1 = \frac{का.कोज्या\frac{ख}{२}\ कोज्या\frac{ग}{२}}{कोज्या\frac{क}{२}}$$

$$\left(\because ज्या\frac{ख+ग}{२} कोज्या\frac{क}{२}\right)$$

अब, का = २ त्रा.ज्या क

$$= ४\ त्रा.ज्या\frac{क}{२}.कोज्या\frac{क}{२}$$

$$\therefore\ अ_1 = ४\ त्रा.ज्या\frac{क}{२}\ कोज्या\frac{ख}{२}.कोज्या\frac{ग}{२}$$

इसी प्रकार, $अ_2 = ४\ त्रा.कोज्या\frac{क}{२}.ज्या\frac{ख}{२}.कोज्या\frac{ग}{२}$

और $अ_3 = ४\ त्रा\ कोज्या\frac{क}{२}\ कोज्या\frac{ख}{२}\ ज्या\frac{ग}{२}$

वैकल्पिक रीति—

$$अ_1 = \frac{\Delta}{सा - का} = \frac{२\ \Delta}{२सा - २का}$$

$$= \frac{खा.गा.ज्या\ क}{खा + गा - का}$$

$$= \frac{२ त्रा\ ज्या\ ख .\ २ त्रा\ ज्या\ ग .\ ज्या\ क}{२ त्रा .\ (ज्या\ ख + ज्या\ ग - ज्या\ क)}$$

$$= \frac{२\ त्रा .\ ज्या\ क .\ ज्या\ ख .\ ज्या\ ग}{(ज्या\ ख + ज्या\ ग - ज्या\ क)}$$

अब, ज्या ख + ज्या ग − ज्या क

$$= \frac{२\Delta}{गा . का} + \frac{२\Delta}{का . खा} - \frac{२\Delta}{खा . गा}$$

(अनुच्छेद ११·१ से)

$$= \frac{२\Delta}{का . खा . गा}\ (खा + गा - का)$$

$$= \frac{२}{का . खा\ गा} \sqrt{सा\ (सा - का)(सा - खा)(सा - गा)} \times (२\ सा - २\ का$$

$$= ४ \sqrt{\frac{(सा - गा)(सा - का)}{गा\ का}} . \sqrt{\frac{(सा - का)\ (सा - खा)}{का\ खा}} \times \sqrt{\frac{सा\ (सा - का)}{खा\ गा}}$$

$$= ४\ ज्या \frac{ख}{२}\ ज्या \frac{ग}{२}\ कोज्या \frac{क}{२}$$

$\therefore$ त्र$_१$ =

$$\frac{१६\ त्रा\ ज्या \frac{क}{२}\ कोज्या \frac{क}{२}\ ज्या \frac{ख}{२}\ कोज्या \frac{ख}{२}\ ज्या \frac{ग}{२}\ कोज्या \frac{ग}{२}}{४\ ज्या \frac{ख}{२}\ ज्या \frac{ग}{२}\ कोज्या \frac{क}{२}}$$

$$= 4 त्रा \; ज्या \frac{क}{२} \; कोज्या \frac{ख}{२} \; कोज्या \frac{ग}{२}$$

इसी प्रकार

$$त्र_१ = ४ \; त्रा \; कोज्या \frac{क}{२} \; ज्या \frac{ख}{२} \; कोज्या \frac{ग}{२}$$

और $$त्र_३ = ४ \; त्रा \; कोज्या \frac{क}{२} \; कोज्या \frac{ख}{२} \; ज्या \frac{ग}{२}$$

११·४२ वहिस्त्रिज्या के अन्य व्यंजक—
अनुच्छेद ११·४१ की आकृति से,

$$कछ_१ + कज_१ = कग + गछ_१ + कख + खज_१$$
$$= कग + गच_१ + कख + खच_१$$
$$(\because गछ_१ = गच_१, \; खज_१ = खच_१)$$
$$= कग + कख + खग = २ \; सा$$

और $कछ_१ = कज_१$

$\therefore \; कछ_१ = कज_१ = सा$

$\triangle \; अ_१कज_१$ से,

$$अ_१ज_१ = कज_१ \; स्प \frac{क}{२}$$

अथवा $त्र_१ = सा \; स्प \dfrac{क}{२}$

इसी प्रकार $त्र_२ = सा \; स्प \dfrac{ख}{२}$

और $त्र_३ = सा \; स्प \dfrac{ग}{२}$

वैकल्पिक रीति—

$$\text{र}_1 = \frac{\Delta}{\text{सा} - \text{का}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{सा}\,(\text{सा} - \text{का})\,(\text{सा} - \text{खा})\,(\text{सा} - \text{गा})}}{(\text{सा} - \text{का})}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{सा}\,(\text{सा} - \text{खा})\,(\text{सा} - \text{गा})}{(\text{सा} - \text{का})}}$$

$$= \text{सा}\sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})\,(\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}\,(\text{सा} - \text{का})}}$$

$$= \text{सा स्प}\frac{\text{क}}{2}$$

इसी प्रकार $\text{र}_2 = \text{सा स्प}\frac{\text{ख}}{2}$

और $\text{र}_3 = \text{सा स्प}\frac{\text{ग}}{2}$

११·५ उदाहरण १— सिद्ध करो कि

$$\Delta = 2\,\text{त्रा}^2 \text{ज्या क ज्या ख ज्या ग}$$

अनुच्छेद ११·२ से,

$$2\,\text{त्रा}^2 \text{ज्या क ज्या ख ज्या ग} = 2\,\text{त्रा}^2 \cdot \frac{\text{का}}{2\text{त्रा}} \cdot \frac{\text{खा}}{2\text{त्रा}} \cdot \frac{\text{गा}}{2\text{त्रा}}$$

$$= \frac{\text{का खा गा}}{4\,\text{त्रा}}$$

$$= \Delta$$

$$\therefore \; \Delta = २ \text{ त्रा}^२ \text{ज्या क ज्या ख ज्या ग}$$

उदाहरण २— सिद्ध करो कि

$$(\text{त्र}_१ + \text{त्र}_२) \text{ स्प} \frac{\text{ग}}{२} = (\text{त्र}_३ - \text{त्र}) \text{ कोस्प } \frac{\text{ग}}{२} = \text{गा}$$

अनुच्छेद ११·४२ से

$$(\text{त्र}_१ + \text{त्र}_२) \text{ स्प}\frac{\text{ग}}{२}$$

$$= \left(\text{सा स्प}\frac{\text{क}}{२} + \text{सा स्प } \frac{\text{ख}}{२}\right) \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२}$$

$$= \text{सा स्प } \frac{\text{ग}}{२}\left(\text{स्प } \frac{\text{क}}{२} + \text{स्प}\frac{\text{ख}}{२}\right)$$

$$= \text{त्र}_३ \left(\frac{\text{ज्या } \frac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२}} + \frac{\text{ज्या } \frac{\text{ख}}{२}}{\text{कोज्या } \frac{\text{ख}}{२}}\right)$$

$$= \text{त्र}_३ \; \frac{\text{ज्या}\left(\frac{\text{क} + \text{ख}}{२}\right)}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२}}$$

$$= \text{त्र}_३ \; \frac{\text{कोज्या } \frac{\text{ग}}{२}}{\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२}},$$

$$\left(\because \frac{\text{क} + \text{ख}}{२} = २०^\circ - \frac{\text{ग}}{२}\right)$$

$$= ४ \text{ त्रा कोज्या} \frac{क}{२} \text{ कोज्या} \frac{ख}{२} \text{ ज्या} \frac{ग}{२} \times \frac{\text{कोज्या} \frac{ग}{२}}{\text{कोज्या} \frac{क}{२} \text{ कोज्या} \frac{ख}{२}}$$ (अनुच्छेद ११·४२ से)

$$= ४ \text{ त्रा ज्या} \frac{ग}{२} \text{ कोज्या} \frac{ग}{२} = २ \text{ त्रा ज्या ग} = \text{गा}$$

और $(\text{त्र}_3 - \text{त्र}) \text{ कोस्प} \frac{ग}{२}$

$$= \left\{ \text{सा स्प} \frac{ग}{२} - (\text{सा} - \text{गा}) \times \text{ स्प} \frac{ग}{२} \right\} \text{ कोस्प} \frac{ग}{२}$$

$$= \left\{ \text{सा} - (\text{सा} - \text{गा}) \right\} = \text{गा}$$

$$\therefore (\text{त्र}_1 + \text{त्र}_2) \text{ स्प} \frac{ग}{२} = (\text{त्र}_3 - \text{त्र}) \text{ कोस्प} \frac{ग}{२} = \text{गा}$$

उदाहरण ३— सिद्ध करो कि

$$(\text{त्र}_1 - \text{त्र})(\text{त्र}_2 - \text{त्र})(\text{त्र}_3 - \text{त्र}) = ४ \text{ त्रा त्र}^2$$

अनुच्छेद ११·३ और ११·४१ से

$$(\text{त्र}_1 - \text{त्र})(\text{त्र}_2 - \text{त्र})(\text{त्र}_3 - \text{त्र})$$

$$= \left( \frac{\Delta}{\text{सा} - \text{का}} - \frac{\Delta}{\text{सा}} \right) \left( \frac{\Delta}{\text{सा} - \text{खा}} - \frac{\Delta}{\text{सा}} \right) \left( \frac{\Delta}{\text{सा} - \text{गा}} - \frac{\Delta}{\text{सा}} \right)$$

दक्षिण पक्ष

$$= \frac{\Delta^3 (\text{सा} - \overline{\text{सा} - \text{का}})(\text{सा} - \overline{\text{सा} - \text{खा}})(\text{सा} - \overline{\text{सा} - \text{गा}})}{\text{सा}^3 (\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}$$

$$= \frac{\Delta^3 \text{ का खा गा}}{\text{सा}^2 \; \Delta^2}$$

$$= \frac{\Delta.\text{का}.\text{खा}.\text{गा}}{\text{सा}^2}$$

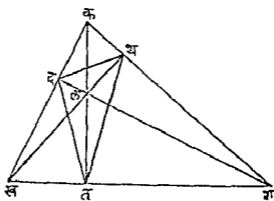
$$= \frac{\Delta^2}{\text{सा}^2} \left(\frac{\text{का}.\text{खा}.\text{गा}}{\Delta}\right)$$

$= \text{त्र}^2 . 4\text{त्रा}$ (अनुच्छेद ११·२१ से)

$\therefore \quad (\text{त्र}_1 - \text{त्र})(\text{त्र}_2 - \text{त्र})(\text{त्र}_3 - \text{त्र}) = 4\text{त्रा}\,\text{त्र}^2$

११·६ त्रिभुज की भुजाओं और कोणबिंदुओं (angular points) से लंबकेन्द्र (orthocentre) की दूरियां ।

त्रिभुज कखग के शीर्षों से सम्मुख की भुजाओं पर कत, खथ, गद लंब खींचो ।

इन तीन रेखाओं का मिथश्च्छेदन बिंदु ल त्रिभुज का लंब केन्द्र है । तथ, थद और दत को मिलाओ । तो त्रिभुज तथद, त्रिभुज कखग का पदिक त्रिभुज (pedal triangle) होगा ।

आ. ११.५

$\triangle$ कखत में,

$$\text{खत} = \text{कख कोज्या ख}$$
$$= \text{गा कोज्या ख}$$

$\triangle$ गखथ में, $\angle \text{गखथ} = ९०^\circ - \text{ग}$

$\triangle$ लखत में,

$$\frac{\text{लत}}{\text{खत}} = \text{स्प तखल}$$
$$= \text{स्प गखथ}$$

$$\therefore \text{लत} = \text{खत स्प गखथ}$$
$$= \text{गा कोज्या ख स्प } (९०^\circ - \text{ग})$$
$$= \text{गा कोज्या ख कोस्प ग}$$

परंतु $\text{गा} = २ \text{ त्रा ज्या ग}$

$$\therefore \text{लत} = २ \text{ त्रा कोज्या ख कोज्या ग}$$

इसी प्रकार $\text{लथ} = २ \text{ त्रा कोज्या ग कोज्या क}$

और $\text{लद} = २ \text{ त्रा कोज्या क कोज्या ख}$

पुनः $\triangle$ कखथ में,

$$\text{कथ} = \text{कख कोज्या क} = \text{गा कोज्या क}$$

और $\triangle$ कतग में, $\angle \text{गकत} = ९०^\circ - \text{ग}$

$\triangle$ कलथ में, $\frac{\text{कल}}{\text{कथ}} = \text{व्युत्कोज्या थकल}$

$$= \text{व्युत्कोज्या गकत}$$

∴ फल = कथ व्युत्कोज्या गकत

= गा कोज्या क व्युत्कोज्या (९०° − ग)

= गा कोज्या क व्युज्ज्या ग

= २ त्रा ज्या ग कोज्या क व्युज्ज्या ग

= २ त्रा कोज्या क

इसी प्रकार, खल = २ त्रा कोज्या ख

गल = २ त्रा कोज्या ग

११·६१ पदिक त्रिभुज की भुजाएं और उसके कोण—

क्योंकि ∠लदख = ९०°, और ∠लतख = ९०°

∴ दलतख एक वृत्तीय चतुर्भुज है।

∴ ∠दतल = ∠दखल = ९०° − क

इसी प्रकार लतगथ एक वृत्तीय चतुर्भुज है।

∴ ∠लतथ = ∠लगथ = ९०° − क

∴ ∠दतथ = ∠दतल + ∠लतथ

= १८०° − २ क

इसी प्रकार ∠तथद = १८०° − २ ख

और ∠थदत = १८०° − २ ग

△कखथ में, कथ = गा कोज्या क

△कगद में,

कद = खा कोज्या क

△कदथ में,

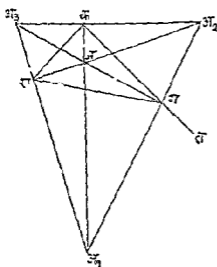
थद² = कद² + कथ² − २कद.कथ कोज्या क

$$= \text{खा}^2\text{कोज्या}^2\text{क} + \text{गा}^2\text{कोज्या}^2\text{क}$$
$$- 2\text{खा कोज्या क.गा कोज्या क.कोज्या क}$$
$$= \text{कोज्या}^2\text{क}(\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - 2\text{खा गा कोज्या क})$$
$$= \text{कोज्या}^2\text{क. का}^2$$

$\therefore$ थद = का कोज्या क

इसीप्रकार दत = खा कोज्या ख

और तथ = गा कोज्या ग

११·६२ मान लो बिंदु अ, त्रिभुज कखग का अंतःकेंद्र और बिंदु $\text{अ}_1$, $\text{अ}_2$ और $\text{अ}_3$ क्रमशः कोण क, ख और ग के सामने के बहिष्केन्द्र हैं। क्योंकि रेखाएं अग और $\text{अ}_1$ग कोण कगख का क्रमशः अन्तरतः (internally) और बाह्यतः (externally) अर्धन करती हैं,

अतः, ज्यामिति से,

$$\angle \text{अगअ}_1 = ९०^\circ$$

इसी प्रकार

$$\angle \text{अगअ}_2 = ९०^\circ$$

इसलिए $\text{अ}_1\text{गअ}_2$ एक सरल रेखा है और अग उस पर लंब है।

आ. ११.६

और रेखाएं अक और $अ_१$फ दोनों कोण खकग का अन्तरतः अर्धन करती हैं। अतः विंदु क, अ और $अ_१$ एक सरलरेखा में हैं। इसी प्रकार $खअअ_२$ और $गअअ_३$ भी सरलरेखाएं हैं।

इसलिए विंदु क, ख, ग त्रिभुज $अ_१अ_२अ_३$ के शीर्षों से सम्मुख की भुजाओं पर खोचें गए लंबो के पाद (feet of perpendiculars) हैं और अ इन लंबो का मिथश्छेदन विंदु है।

अतः कखग त्रिभुज $अ_१अ_२अ_३$ का पदिक त्रिभुज है और विंदु अ उसका लंबकेन्द्र है।

उदाहरण— त्रिभुज $अ_१अ_२अ_३$ की भुजाएं और उसके कोणों का निश्चय करो।

$\triangle$ कखग, $\triangle$ $अ_१अ_२अ_३$ का पदिक त्रिभुज है,

अतः अनुच्छेद ११·६१ से,

$\angle खकग = १८०^\circ - २\ \angle अ_२अ_१अ_३$

अथवा $\angle क = १८०^\circ - २\ \angle अ_१$

$$\therefore \quad \angle अ_१ = \frac{१८०^\circ - क}{२} = ९०^\circ - \frac{क}{२}$$

इसी प्रकार $\angle अ_२ = ९०^\circ - \frac{ख}{२}$

और $\angle अ_३ = ९०^\circ - \frac{ग}{२}$

पुनः अनुच्छेद ११·६१ से

$$खग = अ_2अ_3 \text{ कोज्या } अ_2अ_1अ_3$$

अथवा $$क = अ_2अ_3 \text{ कोज्या } अ_1$$

$$\therefore\ अ_2अ_3 = क \text{ व्युत्कोज्या } अ_1$$

$$= क \text{ व्युत्कोज्या } \left(९०^\circ - \frac{क}{२}\right) = क \text{ व्युज्ज्या } \frac{क}{२}$$

इसी प्रकार $$अ_1अ_3 = ग \text{ व्युज्ज्या } \frac{ग}{२}$$

और $$अ_3अ_1 = ख \text{ व्युज्ज्या } \frac{ख}{२}$$

वैकल्पिक रीति—

अनुच्छेद ११·४१ की टिप्पणी के अनुसार

$$\angle गअ_1ग = ९०^\circ - \frac{क}{२}$$

परन्तु $$\angle खअ_1ग = \angle अ_1$$

$$\therefore\ \angle अ_1 = ९०^\circ - \frac{क}{२}$$

इसी प्रकार $\angle अ_2 = ९०^\circ - \frac{ख}{२}$ और $\angle अ_3 = ९०^\circ - \frac{ग}{२}$

ऊपर की आकृति से $\triangle कअ_1अ_2$ में,

$$अ_1अ_2 = अ_1क \text{ व्युज्ज्या } अ_2$$

११७ मध्यगाओं (medians) की लंबाई—

आ. ११.७

मान लो कि त्रिभुज कखग में मध्यगा कच, रेखा खग का अर्धन करती है।

$$\text{तो} \quad \text{खच} = \text{गच} = \frac{\text{का}}{२}$$

△ कखच में,

$$\text{कच}^२ = \text{कख}^२ + \text{खच}^२ - २\text{कख.खच कोज्या ख}$$

$$= \text{गा}^२ + \frac{\text{का}^२}{४} - २\text{गा}.\frac{\text{का}}{२}.\text{कोज्या ख}$$

$$= \text{गा}^२ + \frac{\text{का}^२}{४} - \text{गा का कोज्या ख}$$

$$\therefore \quad २\text{कच}^२ = २\text{गा}^२ + \frac{\text{का}^२}{२} - २\text{गा का कोज्या ख}$$

$$= अ_1 क \text{ व्युज्ज्या } \left(90^\circ - \frac{ख}{2}\right)$$

$$= अ_1 क \text{ व्युत्कोज्या } \frac{ख}{2}$$

परन्तु $अ_1 क = अ_1 \text{ व्युज्ज्या } \frac{क}{2}$

(अनुच्छेद ११·३१ की टिप्पणी से)

$$\therefore \quad अ_1 अ_2 = अ_1 \text{ व्युज्ज्या } \frac{क}{2} \text{ व्युत्कोज्या } \frac{ख}{2}$$

$$= \text{सा स्प } \frac{क}{2} \text{ व्युज्ज्या } \frac{क}{2} \text{ व्युत्कोज्या } \frac{ख}{2}$$

$$= \frac{\text{सा}}{\text{कोज्या } \frac{क}{2} \text{ कोज्या } \frac{ख}{2}}$$

$$= \text{सा} \sqrt{\frac{\text{खा गा . गा का}}{\text{सा (सा} - \text{का) . सा (सा} - \text{खा)}}}$$

$$= \text{गा} \sqrt{\frac{\text{का खा}}{(\text{सा} - \text{का}) (\text{सा} - \text{खा})}}$$

$$= \text{गा व्युज्ज्या } \frac{ग}{2}$$

इसी प्रकार $अ_2 अ_3$, $अ_3 अ_1$ भी निश्चित किए जा सकते हैं।

## ११.७ मध्यगाओं (medians) की लंबाई—

आ. ११.७

मान लो कि त्रिभुज कखग में मध्यगा कच, रेखा खग का अर्धन करती है।

तो $खच = गच = \frac{का}{२}$

$\Delta$ कखच में,

$$कच^2 = कख^2 + खच^2 - २कख.खच \text{ कोज्या } ख$$

$$= गा^2 + \frac{का^2}{४} - २गा.\frac{का}{२}.\text{कोज्या } ख$$

$$= गा^2 + \frac{का^2}{४} - गा\,का \text{ कोज्या } ख$$

$$\therefore \quad २कच^2 = २गा^2 + \frac{का^2}{२} - २गा\,का \text{ कोज्या } ख$$

$$= २गा^२ + \frac{का^२}{२} - (का^२ + गा^२ - खा^२)$$

$$= गा^२ + खा^२ - \frac{का^२}{२}$$

$$\therefore \quad कच = \frac{१}{२}\sqrt{२गा^२ + २खा^२ - का^२}$$

इसी प्रकार, यदि गक और कख भुजाओं के मध्यबिंदु क्रमशः छ और ज हों तो,

$$खछ = \frac{१}{२}\sqrt{२\,का^२ + २\,गा^२ - खा^२}$$

$$\text{और } गज = \frac{१}{२}\sqrt{२\,खा^२ + २\,का^२ - गा^२}$$

११·७१ भुजाओं के साथ मध्यगाओं की नति (inclinations)—

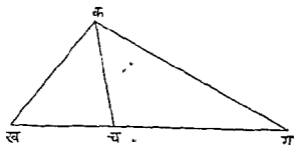
मान लो $\angle$ कचख = अ

$\triangle$ कचख में, $\dfrac{कच}{ज्या\,ख} = \dfrac{गा}{ज्या\,अ}$

$$\therefore \quad ज्या\,अ = \frac{गा\ ज्या\,ख}{कच}$$

$$= \frac{२\,गा\ ज्या\,ख}{\sqrt{२गा^२ + २खा^२ - का^२}}$$

$$= \frac{४ \Delta}{का \sqrt{२गा^२ + २खा^२ - का^२}}$$

११·८ त्रिभुज के कोणों के अर्धक—

आ ११·८

मान लो त्रिभुज कखग के कोण क का अर्धक कच, खग रेखा का च बिंदु में छेदन करता है।

अब, $\Delta$ कखच + $\Delta$ कचग = $\Delta$ कखग

$$\therefore \quad \frac{१}{२} \text{ कख. कच ज्या} \frac{क}{२} + \frac{१}{२} \text{ कग. कच ज्या} \frac{क}{२}$$

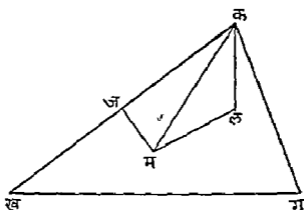
$$= \frac{१}{२} \text{ कख. कग ज्याक}$$

अथवा $\frac{१}{२}$ कच ज्या $\frac{क}{२}$ (गा + खा) = $\frac{१}{२}$ गा खा ज्या क

अथवा कच (गा + खा) = २ खा गा कोज्या $\frac{क}{२}$

$$\therefore \text{ कच} = \frac{2\text{खा गा कोज्या}\frac{\text{क}}{2}}{\text{गा} + \text{खा}}$$

और $\angle$कचग = $\angle$चखक + $\angle$खकच = ख + $\frac{\text{क}}{2}$

११.९ लंबकेन्द्र और परिकेंद्र के बीच की दूरी—

आ. ११.९

मान लो कि बिंदु म और ल क्रमशः त्रिभुज कखग के परिकेंद्र और लंबकेंद्र हैं। बिंदु म से कख रेखा पर मज लंब खींचो।

अब, $\angle$जमक = ग

$\therefore$ $\angle$मकख = ९०° − ग

और $\angle$लकख = ९०° − ख

$\therefore$ $\angle$ मकल = $\angle$ लकख − $\angle$ मकख

= (९०° − ख) − (९०° − ग) = ग − ख

और कल = २त्रा कोज्या क (अनुच्छेद ११·६ से)

और कम = त्रा

$\triangle$ कमल से,

मल² = कम² + कल² − २कम. कल कोज्या मकल

= त्रा² + ४त्रा² कोज्या² क

− ४त्रा² कोज्या क कोज्या (ग − ख)

= त्रा² [१ + ४ कोज्या क { कोज्या क

− कोज्या (ग − ख) } ]

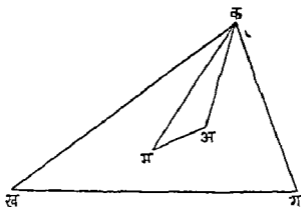
= त्रा² [ १ − ४ कोज्या क {कोज्या (ख + ग)

+ कोज्या (ग − ख) } ]

= त्रा² [१ − ८ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग]

$\therefore$ मल = त्रा √(१ − ८ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग)

उपप्रमेय— यदि त्रिभुज कखग लंबकोण त्रिभुज हो तो मल = त्रा

११·९१ परिकेंद्र और अंतःकेंद्र के बीच की दूरी—

आ ११.१०

मान लो त्रिभुज कखग में बिंदु म और अ क्रमशः परिकेन्द्र और अंतःकेन्द्र हैं।

$$\angle \text{गकअ} = \frac{\text{क}}{२}, \quad \angle \text{गकम} = ९०^\circ - \text{ख}$$

$$\therefore \quad \angle \text{अकम} = \angle \text{गकम} - \angle \text{गकअ}$$

$$= ९०^\circ - \text{ख} - \frac{\text{क}}{२}$$

$$= \frac{\text{क} + \text{ख} + \text{ग}}{२} - \text{ख} - \frac{\text{क}}{२}$$

$$= \frac{\text{ग} - \text{ख}}{२}$$

$$\text{कम} = \text{त्रा}$$

और $\text{कम} = \text{घ व्युज्या}\frac{\text{क}}{२}$

(अनुच्छेद ११·२)

$$= \left(४\text{त्रा ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\right)\text{व्युज्या}\frac{\text{क}}{२}$$

$$= ४\text{त्रा ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

$\triangle$ अकम में,

$$\text{मअ}^२ = \text{कम}^२ + \text{कअ}^२ - २\text{कम. कअ कोज्या अकम}$$

$$= \text{त्रा}^२ + १६\text{त्रा}^२\text{ज्या}^२\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}^२\frac{\text{ग}}{२} - ८\text{त्रा}^२\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\text{कोज्या}\left(\frac{\text{ग}-\text{ख}}{२}\right)$$

$$= \text{त्रा}^२\left[१ + ८\text{ ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\left\{२\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२} - \text{कोज्या}\left(\frac{\text{ग}-\text{ख}}{२}\right)\right\}\right]$$

$$= \text{त्रा}^२\left[१ + ८\text{ ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\left(\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२} - \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}\right)\right]$$

$$= \text{त्रा}^२\left[१ - ८\text{ ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\text{कोज्या}\left(\frac{\text{ख}+\text{ग}}{२}\right)\right]$$

$$= \text{त्रा}^२\left[१ - ८\text{ ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}\right]$$

$$\therefore \text{मअ} = \text{आ}\sqrt{१ - ८ \text{ ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}}$$

यह फल इस रूप में भी लिखा जा सकता है—

$$\text{मअ}^2 = \text{आ}^2 - २\text{आ}.४\text{आ ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

$$= \text{आ}^2 - २\text{आ अ}$$

इसी प्रकार यह भी दिखाया जा सकता है कि,

$$\text{मअ}_1 = \text{आ}\sqrt{१ + ८ \text{ ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}}$$

$$= \sqrt{\text{आ}^2 + २\text{आ अ}_1}$$

## प्रश्नावलि १६

(१) एक त्रिभुज की भुजाएं क्रमशः ३, ४ और ५ पाद लंबी हैं। आ, अ, $\text{अ}_1$, $\text{अ}_2$ और $\text{अ}_3$ निश्चित करो।

(२) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज कखग का

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{१}{२}\ \text{गा}^2\frac{\text{ज्या क. ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}$$

सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज कखग में,

(३) $\text{का कोस्प क} + \text{खा कोस्प ख} + \text{गा कोस्प ग} = २(\text{आ} + \text{अ})$

(४) $\text{अ}_1 + \text{अ}_2 + \text{अ}_3 - \text{अ} = ४\text{ आ}$ [आंध्र १९४२

(५) $\left(\frac{१}{त्र_१}+\frac{१}{त्र_२}\right)\left(\frac{१}{त्र_२}+\frac{१}{त्र_३}\right)\left(\frac{१}{त्र_३}+\frac{१}{त्र_१}\right)$

$$=\frac{६४ \text{ त्रा}^३}{\text{का}^२ \text{ खा}^२ \text{ गा}^२}$$

[नागपुर १९२५

(६) $\frac{१}{त्र}=\frac{१}{त्र_१}+\frac{१}{त्र_२}+\frac{१}{त्र_३}$ [कलकत्ता १९३१

(७) $त्र_२त्र_३+त्र_३त्र_१+त्र_१त्र_२=\text{सा}^२$

[बंबई १९२७

(८) $(त्र_२-त्र_३)$ कोज्या क $+(त्र_३-त्र_१)$ कोज्या ख $+(त्र_१-त्र_२)$ कोज्या ग $=०$

[आंध्र १९३५

(९) $त्र\, त्र_१\, त्र_२\, त्र_३=\Delta^२$ [बंबई १९४३

(१०) $\Delta=४$ त्रा त्र कोज्या $\frac{क}{२}$ कोज्या $\frac{ख}{२}$ कोज्या $\frac{ग}{२}$

(११) $(त्र_२+त्र_३)\sqrt{\frac{त्र\, त्र_१}{त्र_२\, त्र_३}}=\text{का}$

[बंबई १९४२

(१२) $\frac{१}{२\,\text{त्रा}\,त्र}=\frac{१}{\text{खा}\,\text{गा}}+\frac{१}{\text{गा}\,\text{का}}+\frac{१}{\text{का}\,\text{खा}}$

[इलाहाबाद १९४२

(१३) यदि कखग एक लंबकोण त्रिभुज हो, तो सिद्ध करो कि

$$\left(१-\frac{त्र_१}{त्र_२}\right)\left(१-\frac{त्र_१}{त्र_३}\right)=२$$

(१४) यदि कखग एक लंबकोण त्रिभुज हो, तो सिद्ध करो कि

$$ग्र_1 = ग्र_2 + ग्र_3 + ग्र$$ [नागपुर १९४३

(१५) यदि $\Delta$कखग में, शीर्ष क, ख, ग से सामने की भुजाओं पर खींचे गए लंबो की लंबाइयां क्रमशः $ल_1, ल_2, ल_3$ हों तो सिद्ध करो कि

(१) $\frac{१}{ल_1} + \frac{१}{ल_2} + \frac{१}{ल_3} = \frac{१}{ग्र}$ [नागपुर १९४६

(२) $ग्र_2$ और $ग्र_3$ का हरात्मक मध्यक (harmonic mean) $ल_1$ है।

[नागपुर १९४६

(३) $८\ ऋा^3 = \frac{का^2\ खा^2\ गा^2}{ल_1\ ल_2\ ल_3}$ [इलाहाबाद १९३९

(१६) त्रिभुज कखग में शीर्ष-बिन्दुओं से सामने की भुजाओं पर खींचे गए लम्ब बिन्दु म पर मिलते हैं; और मक = य, मख = र, मग = ल, तो दिखाओ कि

$$\frac{का}{य} + \frac{खा}{र} + \frac{गा}{ल} = \frac{का\ खा\ गा}{य\ र\ ल}$$

[बनारस १९४४

(१७) सिद्ध करो कि यदि त्रिभुज कखग में शीर्ष क, ख, ग से सामने की भुजाओं पर खींचे गए लम्बों के पाद क्रमशः च, छ, ज हों तो त्रिभुज कछज, खचज

और गचछ के परिलेखी वृत्तों के व्यास क्रमशः का.कोस्प.क, खा.कोस्प.ख और गा.कोस्प.ग हैं।

(१८) दिखाओ कि त्रिभुज कखग के पदिक त्रिभुज का परिमाप ४ त्रा. ज्या क. ज्या ख. ज्या ग है।

[नागपुर १९४१

(१९) यदि त्रिभुज कखग के परिकेन्द्र से तीनों भुजाओं पर खींचे गए लम्बों की लम्बाइयां ल, ल′, ल″ हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{का}{ल}+\frac{खा}{ल'}+\frac{गा}{ल''}=\frac{१}{४}\cdot\frac{का\,खा\,गा}{ल\,ल'\,ल''}$$

[बनारस १९३५

(२०) सिद्ध करो कि त्रिभुज कखग में,

$$\frac{\text{अंतर्वृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}=\frac{\pi}{\text{कोस्प}\frac{क}{२}\text{कोस्प}\frac{ख}{२}\text{कोस्प}\frac{ग}{२}}$$

[कलकत्ता बी. एस्सी १९३१

(२१) यदि त्रिभुज कखग के बहिष्केन्द्र $अ_१$, $अ_२$ और $अ_३$ हों तो सिद्ध करो कि

(१) $अ_२ अ_३ = का.व्युज्ज्या\,\frac{क}{२} = ४\ त्रा.कोज्या\,\frac{क}{२}$

(२) $\triangle अ_१ अ_२ अ_३$ का क्षेत्रफल

$$=८त्रा^२.कोज्या\,\frac{क}{२}\ कोज्या\,\frac{ख}{२}\ कोज्या\,\frac{ग}{२}$$

$$=\frac{का.खा.गा}{२त्रा}$$

[नागपुर १९४०, १९४४

(३) $अ_2 अ_3 . अ_3 अ_1 . अ_1 अ_2 = \frac{१६ त्रा^2 . \Delta}{प्र}$

(२२) यदि त्रिभुज कखग का अंतःकेन्द्र अ और बहिष्केन्द्र $अ_1, अ_2, अ_3$ हों, तो सिद्ध करो कि

(१) $अ अ_1 =$ का.व्युत्कोज्या $\frac{क}{२} = ४$ त्रा.ज्या $\frac{क}{२}$

(२) $अ अ_1 . अ अ_2 . अ अ_3 = १६ त्रा^2 प्र$

[नागपुर १९३१

(३) $अ_1 क . अ_2 ख . अ_3 ग$

$= ६४ त्रा^3 .कोज्या^2 \frac{क}{२} कोज्या^2 \frac{ख}{२} कोज्या^2 \frac{ग}{२}$

(४) अक.अख अग $= ४$ त्रा.$प्र^2$

(५) $\frac{अक}{अ_1 क} + \frac{अख}{अ_2 ख} + \frac{अग}{अ_3 ग} = १$

(२३) यदि त्रिभुज कखग की खग भुजा पर बिंदु च और छ इस प्रकार लिए जाएं कि खच = चछ = छग और यदि $\angle$खकच = य, $\angle$चकछ = र, $\angle$छकग = ल तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ज्या (य+र) ज्या (र+ल)}{ज्या य ज्या ल} = ४$$

[नागपुर १९४५

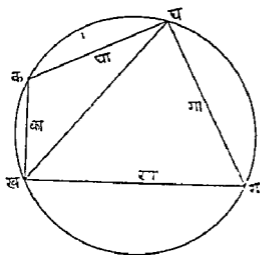
(२४) यदि त्रिभुज कखग के कोण ग का अर्धक, कख भुजा का च बिंदु पर और परिवृत्त का छ बिंदु पर छेदन करता है तो दिखाओ कि

$$\frac{\text{गछ}}{\text{चछ}} = \frac{(\text{का}+\text{खा})^2}{\text{गा}^2}$$

[नागपुर १९४४

# बारहवां अध्याय

## वृत्तीय चतुर्भुज; नियमित बहुभुज

### १२·१ वृत्तीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल—

मान लो कि कखगघ एक वृत्तीय चतुर्भुज है जिसमें कख = का, खग = खा, गघ = गा, घक = घा और जिसका क्षेत्रफल क्ष है।

आ. १२·१

चतुर्भुज कखगघ = △कखघ + △खगघ

$\therefore$ क्ष $= \frac{१}{२}$ का.घा.ज्या क $+ \frac{१}{२}$ खा.गा.ज्या ग

$= \frac{१}{२}$(का.घा + खा.गा) ज्या क

(∴ ग = π − क)

$\therefore$ ज्या क $= \frac{२क्ष}{(\text{का.घा} + \text{खा.गा})}$ ............(१)

△कखघ में,

खघ$^२$ = का$^२$ + घा$^२$ − २का.घा.कोज्या क

△खगघ में,

खघ$^२$ = खा$^२$ + गा$^२$ − २खा.गा.कोज्या ग

= खा$^२$ + गा$^२$ + २खा.गा.कोज्या क

खघ$^२$ की दोनों अहार्मों का समीकरण करने पर

का$^२$ + घा$^२$ − २ का.घा.कोज्या क

= खा$^२$ + गा$^२$ + २ खा.गा.कोज्या क

$\therefore$ कोज्या क $= \frac{\text{का}^२ + \text{घा}^२ - \text{खा}^२ - \text{गा}^२}{२ (\text{का.घा} + \text{खा.गा})}$ ... (२)

(१) और (२) के वर्ग और योग से,

$$१ = \frac{४ \text{ क्ष}^२}{(\text{का.घा} + \text{खा.गा})^२} + \frac{(\text{का}^२ + \text{घा}^२ - \text{खा}^२ - \text{गा}^२)^२}{४ (\text{का.घा} + \text{खा.गा})^२}$$

अथवा ४ (का.घा + खा.गा)$^२$

= १६ क्ष$^२$ + (का$^२$ + घा$^२$ − खा$^२$ − गा$^२$)$^२$

अथवा १६ $क्ष^2$

$$= 4(का.घा + खा.गा)^2 - (का^2 + घा^2 - खा^2 - गा^2)^2$$

$$= \left\{2\,(का.घा + खा.गा) + (का^2 + घा^2 - खा^2 - गा^2)\right\}$$

$$\times \left\{2\,(का.घा + खा.गा) - (का^2 + घा^2 - खा^2 - गा^2)\right\}$$

$$= \left\{(का + घा)^2 - (खा - गा)^2\right\} \times$$

$$\left\{(खा + गा)^2 - (का - घा)^2\right\}$$

$$= (का + घा + खा - गा)\ (का + घा - खा + गा) \times$$

$$(खा + गा + का - घा)\ (खा + गा - का + घा)$$

यदि का + खा + गा + घा = २ सा तो

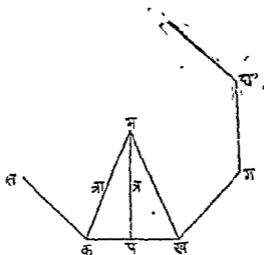
$$१६\ क्ष^2 = (२सा - २गा)\ (२सा - २खा) \times$$

$$(२सा - २घा)\ (२सा - २का)$$

$$\therefore\ क्ष^2 = (सा - का)\ (सा - खा)\ (सा - गा)\ (सा - घा)$$

$$\therefore\ क्ष = \sqrt{(सा - का)\,(सा - खा)\,(सा - गा)(सा - घा)}$$

१२·२ नियमित बहुभुज— यदि किसी बहुभुज की सब भुजाएं और सब कोण समान हों तो उसे नियमित बहुभुज कहते हैं।

अब नियमित बहुभुज के कोण और उसकी प्रत्येक भुजा से उसके केन्द्र पर आपातित कोण निश्चित किए जायेंगे।

आ. १२·२

स भुजाओं का एक नियमित बहुभुज कखगघ...त है। मान लो कोण क और ख के अर्धक बिंदु म पर मिथश्छेदन करते हैं। यदि म बिंदु को प्रत्येक कोण बिंदु से मिलाया जाय, तो त्रिभुज कमख के समान, स त्रिभुज प्राप्त होंगे और प्रत्येक भुजा से म बिंदु पर आपातित कोण समान होगा।

$$\therefore \angle \text{कमख} = \frac{१}{\text{स}} \text{ (चार लम्बकोण)}$$

$$= \frac{२ \text{ प्या}}{\text{स}}$$

त्रिभुज कमख में आधार कख पर के कोण समान हैं;

$$\angle \text{मकख} = \frac{\text{प्या} - \angle \text{कमख}}{२} = \frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

$$\therefore \text{ बहुभुज का प्रत्येक कोण} = २\angle \text{मकख} = \frac{(\text{स} - २)\,\text{प्या}}{\text{स}}$$

१२·३ नियमित बहुभुज में अंतर्लिखित और उसके परिलेखी वृत्तों की त्रिज्याएं।

आकृति १२·२ में मान लो स भुजाओं का एक नियमित बहुभुज कखगघ......त है, जिसका केन्द्र म है और जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई य है। मक, मख को मिलाओ और म से कख पर मप लंब खींचो। मप और मक, नियमित बहुभुज की, क्रमशः अंतस्त्रिज्या और परित्रिज्या होंगी। मप को त्र और मक को त्रा से दर्शाओ।

$$\triangle \text{मकप में मप} = \text{कप. स्प मकप}$$
$$= \text{कप. स्प मकख}$$

परन्तु पिछले अनुच्छेद से,

$$\angle \text{ मकख} = \frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

$$\therefore \text{ त्र} = \frac{\text{य}}{२}\text{स्प}\left(\frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}}\right)$$

$$= \frac{\text{य}}{२}\text{ कोस्प}\frac{\text{प्या}}{\text{स}} \qquad \text{.....................} \quad (१)$$

पुनः $\frac{\text{कप}}{\text{मक}}$ = कोज्या मकप

अथवा मक = कप. व्युत्कोज्या मकप

= कप. व्युत्कोज्या मकख

$\therefore$ त्रा = $\frac{\text{य}}{२}$ व्युत्कोज्या $\left(\frac{\text{व्या}}{२} - \frac{\text{व्या}}{\text{स}}\right)$

= $\frac{\text{य}}{२}$ व्युज्ज्या $\frac{\text{व्या}}{\text{स}}$ ......................(२)

१२·४ नियमित बहुभुज का क्षेत्रफल—

नियमित बहुभुज कखगघ ...त का क्षेत्रफल

= स × (△ मकप का क्षेत्रफल)

= स. कप. मप

= स. कप. कप. स्प मकख

= स कप². स्प मकख

= स $\left(\frac{\text{य}}{२}\right)^२$ स्प $\left(\frac{\text{व्या}}{२} - \frac{\text{व्या}}{\text{स}}\right)$

= स $\frac{\text{य}^२}{४}$ कोस्प $\frac{\text{व्या}}{\text{स}}$ ......(अ)

इस क्षेत्रफल को अंतस्त्रिज्या और परित्रिज्या के पदों में व्यक्त कर सकते हैं।

इस प्रकार अपेक्षित क्षेत्रफल

$$= \frac{स.य^2}{४} \text{ कोस्प } \frac{प्या}{स}$$

$$= \frac{स}{४}\left(\frac{४ य^2}{\text{कोस्प}^2 \frac{प्या}{स}}\right) \text{ कोस्प } \frac{प्या}{स}$$

[अनुच्छेद १२.३ सूत्र (१) से]

$$= स.त्र^2.\text{स्प}_{\frac{प्या}{स}} \quad \text{..............(आ)}$$

पुनः अपेक्षित क्षेत्रफल $= \frac{स.य.^2}{४} \text{ कोस्प} \frac{प्या}{स},$

$$= \frac{स}{४}\left(\frac{४ त्रा^2}{\text{व्युज्ज्या}^2 \frac{प्या}{न}}\right) \text{ कोस्प } \frac{प्या}{स}$$

[अनुच्छेद १२.३ सूत्र (२) से]

$$= स.त्रा^2.\text{कोज्या}\frac{प्या}{स}\text{ज्या}\frac{प्या}{स}$$

$$= \frac{स}{२}\cdot त्रा^2.\text{ज्या}\frac{२ प्या}{स} \text{..............(इ)}$$

१२.५ वृत्त का क्षेत्रफल— यदि किसी नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या अनियत रूप से (indefinitely) बढ़ाई जाये तो सीमा में बहुभुज का परिमाप, परिलेखी वृत्त की परिधि से संपतन करता है।

इसलिए जब नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या अनंत हो जाती है तो उसका क्षेत्रफल परिवृत्त के क्षेत्रफल के सम हो जाता है।

यदि नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या स हो और उसकी परित्रिज्या त्रा हो तो

$$\text{बहुभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\text{स}}{2}\text{त्रा}^2\text{ज्या}\frac{2\text{प्या}}{\text{स}}$$

∴ परिलेखी वृत्त (त्रिज्या त्रा) का क्षेत्रफल

$$= \underset{\text{स}\to\infty}{\text{सी}}\left\{\frac{\text{स}}{2}\text{त्रा}^2\cdot\text{ज्या}\frac{2\text{प्या}}{\text{स}}\right\}$$

$$= \text{त्रा}^2\underset{\text{स}\to\infty}{\text{सी}}\left\{\text{प्या}\cdot\frac{\text{स}}{2\text{प्या}}\text{ज्या}\frac{2\text{प्या}}{\text{स}}\right\}$$

$$= \text{प्या}\cdot\text{त्रा}^2\underset{\text{स}\to\infty}{\text{सी}}\left\{\frac{\text{ज्या}\left(\frac{2\text{प्या}}{\text{स}}\right)}{\left(\frac{2\text{प्या}}{\text{स}}\right)}\right\}$$

$$= \text{प्या}.\text{त्रा}^2\underset{\left(\frac{2\text{प्या}}{\text{स}}\right)\to 0}{\text{सी}}\left\{\frac{\text{ज्या}\left(\frac{2\text{प्या}}{\text{स}}\right)}{\left(\frac{2\text{प्या}}{\text{स}}\right)}\right\}$$

$$= \text{प्या}.\text{त्रा}^2 \qquad \text{(अनुच्छेद ३·२१ से)}$$

इसलिए किसी वृत्त का क्षेत्रफल

= प्या × (उसकी त्रिज्या का वर्ग)

१२·६ उदाहरण— $\sqrt{3}$ पाद त्रिज्या के एक वृत्त का परिलेखन करने वाले नियमित षड्भुज (hexagon) का परिमाप और क्षेत्रफल निश्चित करो।

मान लो षड्भुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई य है।

तब, $त्र = \frac{य}{२}$ कोस्प $\frac{\text{प्या}}{स}$ सबन्ध से,

$$\sqrt{3} = \frac{य}{२} \text{ कोस्प } \frac{\text{प्या}}{६} = \frac{य}{२} \sqrt{3}$$

∴ य = २ पाद

∴ षड्भुज का परिमाप = २ × ६ = १२ पाद
और षड्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{६ य^2}{४} \text{ कोस्प } \frac{\text{प्या}}{६}$$

[अनुच्छेद २·४ सूत्र (अ) से

$$= \frac{६ \cdot ४ \cdot \sqrt{3}}{४}$$

$= ६\sqrt{3}$ वर्ग पाद

## प्रश्नावलि १७

(१) स भुजाओं के एक नियमित बहुभुज में अंतर्लिखित वृत्त और उसके परिलेखी की त्रिज्याएं क्रमशः त्र और त्रा हैं और बहुभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई य है।

सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{1}{\text{कोज्या}\frac{\text{प्या}}{\text{स}}}, \text{ और } (\text{आ} + \text{अ}) = \frac{\text{प}}{2}\text{कोस्प}\frac{\text{प्या}}{2\text{स}}$$

(२) ४ पाद त्रिज्या के एक वृत्त में अंतर्लिखित नियमित षड्भुज का परिमाप और क्षेत्रफल निश्चित करो।

(३) यदि किसी समायत (square) और किसी नियमित अष्टभुज (octagon) के परिमाप समान हों तो सिद्ध करो कि उनके क्षेत्रफल $२ : \sqrt{२} + १$ निष्पत्ति में हैं।

(४) सिद्ध करो कि किसी वृत्त का परिलेखन करने वाले नियमित अष्टभुज और उसमें अंतर्लिखित नियमित अष्टभुज के क्षेत्रफलों की निष्पत्ति $२\sqrt{२}(\sqrt{२} - १)$ है। [नागपुर १९३२

(५) एक नियमित षड्भुज के द्वारा परिलिखित किसी वृत्त में एक समत्रिभुज अंतर्लिखित किया गया है।

सिद्ध करो कि परिलेखी षड्भुज, वृत्त और अंतर्लिखित त्रिभुज के परिमापों की निष्पत्ति $४ : \frac{२\text{प्या}}{\sqrt{३}} : ३$ है और

उनके क्षेत्रफलों की निष्पत्ति $८ : \frac{४\text{प्या}}{\sqrt{३}} : ३$ है।

(६) यदि एक वृत्त में अंतर्लिखित नियमित पंचभुज (pentagon) षड्भुज और दशभुज (decagon) की भुजाओं की लम्बाइयां क्रमशः त, थ और द हों तो सिद्ध करो कि, $त^2 = थ^2 + द^2$ [मैसूर १९४२

(७) यदि किसी भी संख्या की भुजाओं का एक नियमित बहुभुज एक वृत्त में अंतर्लिखित हो और उसी संख्या की भुजाओं का एक नियमित बहुभुज उसी वृत्त का परिलेखन करता हो तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{परिलेखी बहुभुज का क्षेत्रफल}}{\text{परिलेखी बहुभुज की परित्रिज्या}} = \text{अंतर्लिखित बहुभुज का सामिपरिमाप}$$

[मद्रास १९४१

# तेरहवां अध्याय

## छेदा (logarithm)

१३.१ परिभाषा— यदि क कोई संख्या हो और य और त ऐसी दो दूसरी संख्याएं हों कि $क^{य} = त$ तो संख्या य आधार क पर त की छेदा कहलाती है और इसे '$छे_{क}त$' इस प्रकार लिखते हैं। ('$छे_{क}त$' को 'छेदा त आधार क' पढ़ा जाता है।)

इस प्रकार किसी दिए हुए आधार पर किसी भी संख्या की छेदा वह घातांक है जिस तक आधार का उच्चयन करने से दत्त संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरणार्थ, $६^{२} = ३६, \quad \therefore २ = छे_{६}३६$

$$१०^{३} = १०००, \quad \therefore ३ = छे_{१०}१०००$$

$$२५^{-१} = \cdot०४, \quad \therefore -१ = छे_{२५}\cdot०४$$

यह ध्यान में रखना चाहिए कि भिन्न-भिन्न, आधारों पर एक ही संख्या की भिन्न भिन्न छेदाएं होती हैं; जैसे,

$$३^{४} = ८१, \quad \text{और } ९^{२} = ८१$$

$$\therefore छे_{३}८१ = ४ \quad \text{और } छे_{९}८१ = २$$

१३·२ कुछ विशिष्ट छेदाएं—

(१) यदि क कोई परिमित राशि हो, तो सदा $क^0 = १$

$$\therefore छे_क १ = 0$$

अर्थात् किसी भी आधार पर १ की छेदा सदा शून्य होती है।

(२) यदि क कोई राशि हो, तो $क^1 = क$

$$\therefore छे_क क = १$$

अर्थात् किसी भी राशि की छेदा, उसी आधार पर, १ होती है।

(३) यदि क > १, तो $क^\infty = \infty$

$$\therefore छे_क \infty = \infty, \quad क > १$$

(४) यदि क > १, तो $क^{-\infty} = 0$

$$\therefore छे_क 0 = -\infty, \quad क > १$$

१३·३ छेदा के मूलभूत नियम—बीजगणित से यह ज्ञात है कि क, य, र इन किन्हीं भी तीन राशियों में घातांक-नियम (laws of indices) सदा सत्य होते हैं—

(१) $क^य \times क^र = क^{(य+र)}$

(२) $\frac{क^य}{क^र} = क^{(य-र)}$

(३) $(क^य)^र = क^{य \cdot र}$

इन्हीं तीन नियमों के संवादी, तीन मूलभूत नियम छेदा के लिए भी सत्य होते हैं।

यदि क, म, न, तीन वास्तविक (real) राशियां हों, तो

(१) $छे_क (म.न) = छे_क म + छे_क न$

(२) $छे_क \left(\frac{म}{न}\right) = छे_क म - छे_क न$

(३) $छे_क (म^न) = न. छे_क म$

१३·३१ (१) यह सिद्ध करना है कि

$$छे_क (मन) = छे_क म + छे_क न$$

मान लो $छे_क म = य$ और $छे_क न = र$

अब परिभाषानुसार $म = क^य$ और $न = क^र$

$$तो \quad म.न = क^य.क^र = क^{य+र}$$

$$\therefore \quad छे_क म.न = य + र$$

$$= छे_क म + छे_क न$$

अर्थात् किसी दत्त आधार पर दो राशियों के गुणन-फल की छेदा उसी आधार पर इन्हीं राशियों की छेदाओं के योग-फल के सम होती है।

१३.३२ (२) यह सिद्ध करना है कि

$$छे_क \left(\frac{म}{न}\right) = छे_क म - छे_क न$$

मान लो $छे_क म = य$ और $छे_क न = र$

अब परिभाषानुसार,

$$म = क^{य} \text{ और } न = क^{र}$$

$$\text{तो } \frac{म}{न} = \frac{क^{य}}{क^{र}} = क^{य-र}$$

$$\therefore \text{ छे}_{क}\left(\frac{म}{न}\right) = य - र$$

$$= \text{छे}_{क}म - \text{छे}_{क}न$$

अर्थात् किसी दत्त आधार पर दो राशियों के भागफल की छेदा, उसी आधार पर, उन्हीं राशियों की छेदाओं के वियोगफल के सम होती है।

उपप्रमेय १— $\text{छे}_{क}\frac{१}{त} = -\text{छे}_{क}त$

उपप्रमेय २—

$$\text{छे}_{क}\left(\frac{त \times थ \times द \times \ldots}{प \times फ \times ब \times \ldots}\right) = (\text{छे}_{क}त + \text{छे}_{क}थ + \text{छे}_{क}द + \ldots)$$

$$-(\text{छे}_{क}प + \text{छे}_{क}फ + \text{छे}_{क}ब + \ldots)$$

१३·२३ (३) यह सिद्ध करना है कि

$$\text{छे}_{क}(म^{न}) = न\ \text{छे}_{क}म$$

मान लो $\text{छे}_{क}म = य \quad \therefore \quad म = क^{य}$

$$\text{तो } (म^{न}) = (क^{य})^{न} = क^{नय}$$

$\therefore$ छे$_क$ (म$^न$) = न.य

= नछे$_क$म

अर्थात् किसी दत्त आधार पर किसी घातयुक्त संख्या की छेदा, उस घात और दत्त आधार पर उस संख्या की छेदा के गुणनफल के सम होती है।

उपप्रमेय—

छे$_क$ (त$^य$थ$^र$द$^ल$...) = य छे$_क$त + र छे$_क$थ + ल छे$_क$द + ...

१२·३४ अब यह सिद्ध किया जायगा कि

छे$_क$म = छे$_ख$म × छे$_क$ख

मान लो छे$_ख$म = य, छे$_क$ख = र

अब म = ख$^य$ और ख = क$^र$

तो म = ख$^य$ = (क$^र$)$^य$ = क$^{यर}$

$\therefore$ छे$_क$म = यर

= (छे$_ख$म) (छे$_क$ख)

यह सूत्र, इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$$छे_ख म = \frac{छे_क म}{छे_क ख}$$

अर्थात् यदि एक ही आधार पर दो संख्याओं की छेदाएं ज्ञात हों तो उनमें से एक को आधार मान कर उस आधार पर दूसरी संख्या की छेदा भी निश्चित की जा सकती है।

उपप्रमेय— ऊपर के सूत्र में, म = क रखने से

$$\text{छे}_{\text{क}}\text{क} = \text{छे}_{\text{ख}}\text{क} \times \text{छे}_{\text{क}}\text{ख}$$

परन्तु $\text{छे}_{\text{क}}\text{क} = १$

$$\therefore \quad १ = \text{छे}_{\text{ख}}\text{क} \times \text{छे}_{\text{क}}\text{ख}$$

अथवा $\text{छे}_{\text{ख}}\text{क} = \dfrac{१}{\text{छे}_{\text{क}}\text{ख}}$

१२·२ छेदाओं की सामान्य प्रणाली अथवा दशच्छेदा प्रणाली—

छेदाओं की सामान्य प्रणाली में आधार १० लिया जाता है, और इस प्रणाली को सामान्य प्रणाली अथवा दशच्छेदा प्रणाली (common system of logarithms) कहते हैं। आधार १० पर संख्याओं की छेदाएं निश्चय कर, ये सारणी के रूप में एकत्र की गई हैं। यह आधार १० प्रायः लिखा नहीं जाता, केवल मान लिया जाता है। इन सारणियों की सहायता से किसी भी संख्या की छेदा सरलता से निश्चित की जा सकती है; विलोमक्रम से यदि किसी भी संख्या की छेदा ज्ञात हो तो वह संख्या भी निश्चित की जा सकती है।

१३·१ लक्षण (characteristic) और दशमिकांश (mantissa)—

छेदा के अनुकल (integral) भाग को उसका लक्षण और दशमिक (decimal) भाग को उसका दशमिकांश कहते हैं।

यदि किसी संख्या की छेदा ऋण होते हुए अंशतः अनुकल और अंशतः दशमिक हो, तो दशमिक भाग का उपयुक्त प्रकार से रूपांतर कर सदा धन रखा जाता है। अतः किसी भी संख्या की छेदा का दशमिकांश सदा धन होता है।

उदाहरणार्थ— यदि किसी संख्या की छेदा −४·४५६७१ हो, तो उसे (−५+·५४३२९) अथवा संक्षेप में ५̄·५४३२९ लिखते हैं। लक्षण के ऊपर की रेखा यह दर्शाती है कि लक्षण ही ऋण है किन्तु दशमिकांश धन है।

१३·५१ अब यह बतलाया जायगा कि किसी भी संख्या की सामान्य छेदा का लक्षण केवल निरीक्षण से किस प्रकार लिखा जा सकता है।

(१) प्रथम मान लो कि दत्त संख्या १ से बडी है।

तो परिभाषानुसार $१०^{०}$=१ ∴ छे १ = ०

$१०^{१}$ = १० ∴ छे १० = १

$१०^{२}$ = १०० ∴ छे १०० = २

$१०^{३}$ = १००० ∴ छे १००० = ३

इत्यादि

इसलिए १ और १० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा ० और १ के बीच होती है; अतः उसकी छेदा दशमिक भिन्न होती है और उसका लक्षण शून्य होता है।

१० और १०० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा १ और २ के बीच होती है; अतः उसका लक्षण १ होता है।

इसी प्रकार १०० और १००० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण २ होता है।

इसलिए नियम यह है— १ से बड़ी किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण धन, और उस संख्या के अनुकूल भाग के अंकों (digits) की संख्या से १ कम होता है।

उदाहरणार्थ— ३९७·४ के अनुकूल भाग में ३ अंक हैं, अतः उसकी छेदा का लक्षण २ है। इसी प्रकार छे ५०.१, छे २·१२२ छे ३१५५ के लक्षण क्रमशः १, ०, ३ हैं।

(२) अब, मान लो कि दत्त संख्या १ से छोटी है।

तो परिभाषानुसार $१०^{०} = १$, $\therefore$ छे $१ = ०$

$$१०^{-१} = \frac{१}{१०} = \cdot१, \quad \therefore \text{ छे } \cdot१ = -१$$

$$१०^{-२} = \frac{१}{१०^{२}} = \cdot०१, \quad \therefore \text{ छे } \cdot०१ = -२$$

$$१०^{-३} = \frac{१}{१०^{३}} = \cdot००१, \quad \therefore \text{ छे } \cdot००१ = -३$$

इत्यादि

१ और ·१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा ० और −१ के बीच होती है; इसलिए यह छेदा (−१ + कोई दशमिक) के सम होती है; अर्थात् उसका लक्षण १ होता है।

·१ और ·०१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा −१ और −२ के बीच होती है; अतः यह छेदा (−२ + कोई दशमिक) के सम होती है; अर्थात्, उसका लक्षण २̅ होता है।

इसी प्रकार, ·०१ और ·००१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण ३̅ होता है।

इसलिए नियम यह है—

१ से छोटी किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण ऋण, तथा संख्यात्मक दृष्टि से, दशमिक बिन्दु के पश्चात् आने वाले शून्यों की संख्या से १ अधिक होता है।

उदाहरणार्थ— छे·७१२८, छे·०००२६८१, छे·०४६२, छे·००९०२ के लक्षण क्रमशः १̅, ४̅, २̅, ३̅ हैं।

१३·५२ अब दशमिकांश सम्बन्धी एक प्रमेय सिद्ध किया जायगा।

यदि दो संख्याओं के अंक एक ही हों और एक ही क्रम में हों, तथा उनमें केवल दशमिक बिन्दुओं की स्थितियां भिन्न हों, तो उनकी छेदाओं के दशमिकांश एक ही होते हैं।

मान लो क और ख ऐसी दो संख्याएं हैं जिनके अंक एक ही हैं और एक ही क्रम में हैं और जिनमें केवल दशमिक बिन्दुओं की स्थितियां भिन्न हैं।

१० और १०० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा १ और २ के बीच होती है; अतः उसका लक्षण १ होता है।

इसी प्रकार १०० और १००० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण २ होता है।

इसलिए नियम यह है— १ से बड़ी किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण धन, और उस संख्या के अनुकूल भाग के अंकों (digits) की संख्या से १ कम होता है।

उदाहरणार्थ— ३९७·८ के अनुकूल भाग में ३ अंक हैं, अतः उसकी छेदा का लक्षण २ है। इसी प्रकार छे ५०.१, छे २·१२३ छे ३१५५ के लक्षण क्रमशः १, ०, ३ हैं।

(२) अब, मान लो कि दत्त संख्या १ से छोटी है।

तो परिभाषानुसार $१०^{०} = १$, $\therefore$ छे १ = ०

$$१०^{-१} = \frac{१}{१०} = \cdot१, \quad \therefore \quad छे \cdot१ = -१$$

$$१०^{-२} = \frac{१}{१०^{२}} = \cdot०१, \quad \therefore \quad छे \cdot०१ = -२$$

$$१०^{-३} = \frac{१}{१०^{३}} = \cdot००१, \quad \therefore \quad छे \cdot००१ = -३$$

इत्यादि

१ और ·१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा ० और −१ के बीच होती है; इसलिए यह छेदा (−१ + कोई दशमिक) के सम होती है; अर्थात् उसका लक्षण $\bar{१}$ होता है।

·१ और ·०१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा −१ और −२ के बीच होती है; अतः यह छेदा (−२ + कोई दशमिक) के सम होती है; अर्थात्, उसका लक्षण $\bar{२}$ होता है।

इसी प्रकार, ·०१ और ·००१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण $\bar{३}$ होता है।

इसलिए नियम यह है—

१ से छोटी किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण ऋण, तथा संख्यात्मक दृष्टि से, दशमिक बिन्दु के पश्चात् आने वाले शून्यों की संख्या से १ अधिक होता है।

उदाहरणार्थ — छे·७१२८, छे·०००२६८१, छे·०४६२, छे·००९०२ के लक्षण क्रमशः $\bar{१}$, $\bar{४}$, $\bar{२}$, $\bar{३}$ हैं।

१३·५२ अब दशमिकांश सम्बन्धी एक प्रमेय सिद्ध किया जायगा।

यदि दो संख्याओं के अंक एक ही हों और एक ही क्रम में हों, तथा उनमें केवल दशमिक बिन्दुओं की स्थितियां भिन्न हों, तो उनकी छेदाओं के दशमिकांश एक ही होते हैं।

मान लो क और ख ऐसी दो संख्याएं हैं जिनके अंक एक ही हैं और एक ही क्रम में हैं और जिनमें केवल दशमिक बिन्दुओं की स्थितियां भिन्न हैं।

$$\text{छे}\cdot ००४८९२ = \text{छे}\left(\frac{४८९२}{१०^{६}}\right)$$

$$= \text{छे}४८९२ - \text{छे}१०^{६}$$

$$= ३\cdot६८९५ - ६ = \bar{३}\cdot६८९५$$

$$\text{छे}\ ४८९२०० = \text{छे}(४८९२ \times १००)$$

$$= \text{छे}४८९२ + \text{छे}१००$$

$$= ३\cdot६८९५ + २ = ५\cdot६८९५$$

इससे यह स्पष्ट है कि ४, ८, ९, २ इस क्रम में इन्हीं अंको द्वारा बनी संख्याओं की (जिनमें दशमिक विन्दुओं की स्थितियां भिन्न २ है) छेदाओं के दशमिकांश एक ही हैं। विद्यार्थियों को ध्यान में रखना चाहिए कि ऊपर दी हुई प्रत्येक संख्या की छेदा का लक्षण गतानुच्छेद के नियमों के अनुसार तुरंत निकाला जा सकता है।

१३·६ छेदाओं और प्रतिच्छेदाओं (antilogarithms) की सारणियां—

कैसल की छेदाओं की सारणी से १ से लेकर १०००० तक की किसी भी संख्या की छेदा निश्चित की जा सकती है। इन सारणियों में दशमिक विन्दु न देकर चार अंको तक शुद्ध दशमिकांश दिए गए हैं। अनुच्छेद १३·५१ में दिए नियमों के अनुसार उनके लक्षण निकाले जा सकते हैं।

१३.६१ उदाहरण— छे ·२३८७ निकालो।

निरीक्षण से छे ·२३८७ का लक्षण $\bar{१}$ है।

$\therefore$ छे ·२३८७ = $\bar{१}$ + छे २३८७ का दशमिकांश

तो $ख = क . १०^स$

(जहां स धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक है)

$$छे\, ख = छे\, (क\, १०^स)$$
$$= छे\, क + छे\, १०^स$$
$$= छे\, क + स \cdot छे\, १०$$
$$= छे\, क + स$$

$\therefore छे\, ख - छे\, क = स$

इस प्रकार छेख और छेक में केवल एक अनुकल संख्या का ही अन्तर है। अतः, उनके दशमिकांश एक ही हैं। यह इस उदाहरण से अधिक स्पष्ट हो जायगा।

मान लो छे ४८९२ = ३.६८९५ दिया गया है।

$$तो\; छे\, ४८९.२ = छे \frac{४८९२}{१०}$$
$$= छे\, ४८९२ - छे\, १०$$
$$= ३.६८९५ - १$$
$$= २.६८९५$$

$$इसी\; प्रकार\; छे\, ४.८९२ = छे \frac{४८९२}{१०००}$$
$$= छे ४८९२ - छे १०००$$
$$= ३.६८९५ - ३$$
$$= ०.६८९५$$

$$\text{छे}\cdot\text{००४८९२} = \text{छे}\left(\frac{\text{४८९२}}{\text{१०}^{\text{६}}}\right)$$

$$= \text{छे४८९२} - \text{छे१०}^{\text{६}}$$

$$= \text{३}\cdot\text{६८९५} - \text{६} = \bar{\text{३}}\cdot\text{६८९५}$$

$$\text{छे ४८९,२००} = \text{छे}(\text{४८९२} \times \text{१००})$$

$$= \text{छे४८९२} + \text{छे१००}$$

$$= \text{३}\cdot\text{६८९५} + \text{२} = \text{५}\cdot\text{६८९५}$$

इससे यह स्पष्ट है कि ४, ८, ९, २ इस क्रम में इन्हीं अंको द्वारा बनी संख्याओं की (जिनमें दशमिक बिन्दुओं की स्थितियां भिन्न २ है) छेदाओं के दशमिकांश एक ही हैं। विद्यार्थियों को ध्यान में रखना चाहिए कि ऊपर दी हुई प्रत्येक संख्या की छेदा का लक्षण गतानुच्छेद के नियमों के अनुसार तुरंत निकाला जा सकता है।

१३·६ छेदाओं और प्रतिच्छेदाओं (antilogarithms) की सारणियां—

केवल की छेदाओं की सारणी से १ से लेकर १०००० तक की किसी भी संख्या की छेदा निश्चित की जा सकती है। इन सारणियों में दशमिक बिन्दु न देकर चार अंकों तक शुद्ध दशमिकांश दिए गए हैं। अनुच्छेद १३·५१ में दिए नियमों के अनुसार उनके लक्षण निकाले जा सकते हैं।

१३.६१ उदाहरण— छे ·२३८७ निकालो।

निरीक्षण से छे ·२३८७ का लक्षण $\bar{\text{१}}$ है।

$$\therefore \text{ छे }\cdot\text{२३८७} = \bar{\text{१}} + \text{छे २३८७ का दशमिकांश}$$

छेदा सारणी में प्रथम स्तम्भ (column) में २३ और शीर्षपंक्ति (top row) में ८ को देखा जाता है। जिससे २३ की रेखा में ८ के नीचे ३७६६ मिलता है। २३८७ के चतुर्थ अंक ७ के लिए अन्तर स्कम्भ (difference column) का अवलोकन किया जाता है। उसमें ७ के नीचे २३ की रेखा में १३ दिया है। अब इस १३ को ३७६६ में जोड़ दिया जाता है। योगफल ३७७९ ही अपेक्षित दशमिकांश है।

∴ छे ·२३८७ = १.३७७९

उदाहरण— (१) छे ·०९८७ (२) छे ६६६६
और (३) छे २५.४२ निकालो।

१३·६२ कई बार, दी हुई छेदा से उस छेदा वाली संख्या को निकालने का विलोम (converse) प्रश्न पूछा जाता है। यह प्रतिच्छेदा सारणी की सहायता से निकाल सकते हैं।

उदाहरण— वह संख्या निकालो जिसकी छेदा २·२८९२ हो।

यहां दशमिकांश = ·२८९२

प्रतिच्छेदा सारणी में ·२८ को प्रथम स्तम्भ में, और ९ को शीर्षपंक्ति में देखा जाता है। ·२८ की रेखा में ९ के नीचे १९३२ मिलता है। दशमिकांश के चतुर्थ अंक २ के लिए अंतर-स्तम्भ का अवलोकन किया जाता है। यहां ·२८

की रेखा में २ के नीचे १ मिलता है। इस अंतर का १९३२ में योग करने से १९३३ मिलता है। इसलिए दशमिकांश ·२८६२ वाली संख्या १९३३ है। परन्तु दत्त लक्षण २ है।

अतः दशमिक विन्दु तीन अंको के पश्चात् आयगा। इसलिए अपेक्षित संख्या १९३·३ है।

उदाहरण— (१) $\bar{१}$·१७६२ (२) ·८५०१ और (३) २·४ छद्मांशों वाली सख्याओं का निश्चय करो।

१३·७ त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की सारणियां—

०° से ९०° तक के एक-एक कला से बढ़ाए गए, सब कोणों की ज्या, कोटिज्या और स्पर्शज्या की सारणियां बनाई गई हैं। इस प्रकार की सारणियों को क्रमशः प्राकृत (natural) ज्या सारणी, प्राकृत कोटिज्या सारणी और प्राकृत स्पर्शज्या सारणी कहते हैं।

कभी-कभी त्रिकोणमितीय पदसंहतियों की महाओं का निश्चय करना पड़ता है।

उदाहरणार्थ, $य = \frac{\text{ज्या}२०°३५' \times \text{कोज्या}५४°४०'}{\text{स्प}३३°२४'}$

$\therefore$ छे य = छे ज्या २०°३५' + छे कोज्या ५४°४०' − छे स्प ३३°२४'

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की छेदाओं का निश्चय करने के लिये, पहिले इन निष्पत्तियों की अर्हाएं प्राकृत ज्या, कोटिज्या और स्पर्शज्या सारणियों से निकालनी पड़ती हैं, पश्चात् इन अर्हाओं की छेदाएं छेदा सारणी से निश्चित की जाती हैं। इस दुगुने परिश्रम से बचाने के लिए, $0^\circ$ से $90^\circ$ तक के सब कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की छेदाओं को निश्चय कर उनकी पृथक् सारणियां बनाई गई हैं। इस प्रकार की सारणियों को छेदा ज्या सारणी, छेदा कोटिज्या सारणी और छेदा स्पर्शज्या सारणी कहते हैं।

१२·८ संख्यात्मक गणनाओं (calculations) में छेदाओं का प्रधान उपयोग यह होता है कि वे गुणनफलों का योग में और भागफलों का वियोग में रूपांतर कर देते हैं। इसके अतिरिक्त, वे किसी संख्या को घातांक द्वारा उच्चयन करने, अथवा उसका मूल निकालने की क्लिष्ट विधाओं का क्रमशः गुणा और भाग में रूपांतर कर देते हैं। यह निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण १— ८३·२४ के ११ वें मूल की अर्हा स्थूल से निकालो।

मान लो $य = (८३·२४)^{\frac{१}{११}}$

$\therefore छेय = \frac{१}{११} छे\ ८३·२४$

छेदा सारणी से,

$$छे\ ८३·२४ = १·९२०३$$

$$\therefore\ छे\ य = \frac{१}{११} \times १·९२०३$$

$$= ·१७४६\ लगभग$$

प्रतिच्छेदा सारणी से,

$$·१७४६ = छे\ १·४९५$$

$$\therefore\ छे\ य = छे\ १·४९५$$

$$अथवा\ य = १·४९५$$

उदाहरण २—

$$\sqrt[५]{\frac{(५९)^{७} \times \sqrt[४]{७२}}{(९३)^{३} \times \sqrt[३]{१९}}}\ की\ अर्हा\ निकालो।$$

मान लो अपेक्षित अर्हा य है;

$$अतः\ छे\ य = छे \left\{\frac{(५९)^{७} \times (७२)^{\frac{१}{४}}}{(९३)^{३} \times (१९)^{\frac{१}{३}}}\right\}^{\frac{१}{५}}$$

$$= \frac{१}{५}\left[छे(५९)^{७} + छे(७२)^{\frac{१}{४}} - छे(९३)^{३} - छे(१९)^{\frac{१}{३}}\right]$$

$$= \frac{१}{५}\left[७छे५९ + \frac{१}{४}छे७२ - ३छे९३ - \frac{१}{३}छे१९\right]$$

छेदा-सारणी से,

$$छे५९ = १·७७०९$$

$$छे७२ = १·८५७३$$

$$\text{छे}\,९३ = १·२६८५$$

$$\text{छे}\,१९ = १·२७८८$$

$$\therefore\ \text{छे}\,\text{य} = \frac{१}{५}\Big[(७ \times १·३७०१) + \Big(\frac{१}{४} \times १·८५७३\Big)$$

$$- (३ \times १·२६८५) - \Big(\frac{१}{२} \times १·२७८८\Big)\Big]$$

$$= \frac{१}{५} \times ६·१२८१$$

$$= १·३०५८ \quad \text{लगभग}$$

$$= \text{छे}\,२०·२२ \quad \text{प्रतिच्छेदा सारणी से.}$$

$$\therefore\ \text{य} = २०·२२$$

उदाहरण ३— सिद्ध करो कि—

$$६\,\text{छे}\,\frac{१०}{९} + २\,\text{छे}\,\frac{२४}{२५} - \text{छे}\,\frac{३}{५} + ३\,\text{छे}\,\frac{८१}{८०} = \text{छे}\,३$$

$$\text{वामपक्ष} = \text{छे}\left(\frac{१०}{९}\right)^{६} + \text{छे}\left(\frac{२४}{२५}\right)^{२} - \text{छे}\left(\frac{३}{५}\right) + \text{छे}\left(\frac{८१}{८०}\right)^{३}$$

$$= \text{छे}\left[\frac{\left(\frac{१०}{९}\right)^{६}\left(\frac{२४}{२५}\right)^{२}\left(\frac{८१}{८०}\right)^{३}}{\left(\frac{३}{५}\right)}\right]$$

$$=\text{छे}\left\{\left(\frac{५\times२}{३^{२}}\right)^{६}\times\left(\frac{३\times२^{३}}{५^{२}}\right)^{२}\times\left(\frac{३^{४}}{५\times२^{४}}\right)^{३}\times\frac{५}{३}\right\}$$

$$=\text{छे}\left\{\frac{५^{७}.२^{१२}.३^{१४}}{५^{७}.२^{१२}.३^{१३}}\right\}$$

$$=\text{छे}\,३=\text{दक्षिण पक्ष}$$

अन्यथा

$$\text{वामपक्ष}=६\,\text{छे}\left(\frac{५.२}{३^{२}}\right)+२\,\text{छे}\left(\frac{२^{३}.३}{५^{२}}\right)-\text{छे}\left(\frac{३}{५}\right)+३\,\text{छे}\left(\frac{३^{४}}{२^{४}.५}\right)$$

$$=६\,(\text{छे}५+\text{छे}२-२\,\text{छे}\,३)+२\,(३\,\text{छे}\,२+\text{छे}\,३-२\,\text{छे}\,५)-(\text{छे}३-\text{छे}५)+३\,(४\,\text{छे}\,३-४\,\text{छे}\,२-\text{छे}\,५)$$

$$=\text{छे}\,३=\text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण ४— आधार ७ पर ३७ की छेदा निकालो।

अनुच्छेद १३·३४ से,

$$\text{छे}_{७}३७=\text{छे}_{१०}३७\times\text{छे}_{७}१०$$

$$=\frac{\text{छे}_{१०}३७}{\text{छे}_{१०}७}$$

$$= \frac{१·५६८२}{·८४५८} \quad \text{छेदासारणी से}$$

$$= १·८५४६$$

उदाहरण ५— समीकार $\frac{३^{३य}}{११^{२य+१}} = १०^{य-१}$ का स्थूल रूप से साधन करो।

दोनों पक्षों की छेदाएं लेने पर,

$$३\text{य छे } ३ - (२\text{य}+१) \text{ छे } ११ = (\text{य}-१) \text{ छे}१० = (\text{य}-१)$$

$$\therefore \quad \text{य} = \frac{१ - \text{छे } ११}{१ + २\text{छे}११ - ३\text{छे}३}$$

$$= \frac{१ - १·०४१४}{१ + २·०८२८ - १·४३१३} \quad \text{छेदासारणी से}$$

$$= \frac{-०·०४१४}{१·६५१५}$$

$$= -·०२५०७ \quad \text{लगभग}$$

१३·२ अनुपाती भागों का प्रनियम (principle of proportional parts)—

छेदा सारणी से चार अंकों की किसी भी संख्या की छेदा निकाल सकते हैं। परन्तु, मान लो २५६३ और २५६४ के बीच की किसी संख्या की छेदा निकालनी है;

उदाहरणार्थ, २५६३·६ की छेदा निकालनी है। ऐसी दशा में अनुपाती भागों के प्रनियम का प्रयोग होता है; इस प्रनियम का यह अर्थ है कि किसी संख्या की वृद्धि उसकी छेदा के अनुपात में होती है।

ये उदाहरण इस प्रनियम का प्रयोग दर्शाते हैं।

उदाहरण १— छे ७२·३५७ निकालो।

प्रथम ७२३५ और ७२३६ की छेदाएं निश्चित की जायंगी।

छेदासारणी से, छे ७२३६ = ३·८५९५

छे ७२३५ = ३·८५९४

∴ छे ७२३६ − छे ७२३५ = ०·०००१

इसलिए जब संख्या में १ की वृद्धि होती है, तब उसकी छेदा में ०·०००१ की वृद्धि होती है। अतः, अनुपाती भागों के प्रनियम से, संख्या में ·७ की वृद्धि के लिये, उसकी छेदा की वृद्धि, ·७ × ·०००१ = ·००००७ होगी।

∴ छे ७२३५·७ = ३·८५९४ + ·००००७

= ३·८५९४७

∴ छे ७२·३५७ = १·८५९४७

उदाहरण २— यदि कोज्या ३१°२३′ = ·८५५३ हो और १′ के लिए अंतर = ·००१७ हो तो कोज्या ३१°२३′४०″ निकालो।

१′ अर्थात् ६०″ के लिए अंतर = ·००१७

∴ ४०″ के लिए अंतर = $\frac{४०}{६०}$ × ·००१७

= ·००११ लगभग

क्योंकि कोण की वृद्धि के साथ उसकी कोटिज्या न्यून होती है,

अतः कोज्या २१°२२′४०″ = ·८५५३ − ·००११
= ·८५४२

## प्रश्नावलि १८

(१) यदि छे ७ = ·८४५१ और छे १९ = १·२७८८ तो

(क) छे १·३३

(ख) छे २४०·१

(ग) छे $\sqrt[५]{१३३}$

और (घ) छे $\sqrt[३]{·००३६१}$ निश्चित करो।

(२) ·०८९, २·०५, ·००००३, $\sqrt[४]{३६९६}$ और $(५२४७७)^{\frac{२}{३}}$ की छेदाओं के लक्षण क्या हैं ?

(३) ०·१७५६ का ०·०८०२३ से गुणन और भाजन करो।

(४) (क) ३३·३ × ·०२१२ × २·०२२ और

(ख) $\frac{८·३५७ \times ११·४३ \times ·५२९२}{३·१४५ \times १·४३२}$

की अर्हाएं निकालो।

(५) इनकी अर्हाएं निकालो—

(क) $(·०३६)^{१७}$, $\left(\frac{१}{६·०१}\right)^{३५}$, $(५९२)^{७७}$

(ख) $(४६)^{\frac{१}{५}}$, $(२·९)^{\frac{१}{६}}$, $(·०००१२२)^{\frac{१}{३}}$

(६) सिद्ध करो।

(क) ७ छे $\frac{१६}{१५}$ + ५ छे $\frac{२५}{२४}$ + ३ छे $\frac{८१}{८०}$ = छे २

[इलाहाबाद १९२०

(ख) ७ छे $\frac{१०}{९}$ − २ छे $\frac{२५}{२४}$ + ३ छे $\frac{८१}{८०}$ = छे २

[कलकत्ता १९२३

(७) उपसन्न अर्हाएं निकालो।

(क) $\frac{(२३.५)^{२} \times (.५२३)^{३}}{१ - (०.३५२)^{२}}$ [मद्रास १९४२

(ख) $\sqrt{\frac{१७^{\frac{१}{५}} \times ३^{\frac{१}{११}}}{\sqrt{५२} \; ^{७}\sqrt{८९}}}$

(ग) $\frac{(\text{ज्या } ७०^{\circ}३३')^{\frac{१}{५}} \; (\text{स्प } ४०^{\circ}५०')^{\frac{३}{२}}}{(.३३३३)^{\frac{१}{२}} \; \text{कोज्या } ५५^{\circ}४'}$

(८) छे$_{१८}$८९, छे$_{८१}$९८, और छे$_{१७}$४३२ निकालो।

(९) यदि छे$_{१०}$ क = ख, तो छे$_{१००}$ क और छे$_{.००१}$क निकालो। [बंबई १९०१

(१०) किसी भी छेदा प्रणाली का
(क) आधार २ से आधार १२८ में
(ख) आधार ३ से आधार ८१ में
(ग) आधार ४९ से आधार ७ में परिवर्तन करने वाले गुणक (coefficient) निश्चय करो।

(११) (अ) (१) $२^{७३}$ और (२) $३^{४४}$ में अंको की संख्या निकालो।

(आ) (१) $२^{-११}$ और (२) $३^{-१३}$ में प्रथम सार्थक अंकों की स्थिति वतलाओ।

(१२) इन समीकारों को स्थूल रूप से सिद्ध करो—

(१) $७^{२य} - ९\,(७^{य}) + १४ = ०$ [आंध्र १९३३

(२) $\frac{२^{६य}}{३^{य-२}} = ७^{य+१}$

(३) $२^{य-१} = ३^{र+१}$, $२^{य-र} \times ७^{र} = ९$

(१३) यदि छे ९६५१ = ३·९८४१

और छे ९६५२ = ३·९८४२

तो अनुपाती भागों के प्रनियम का प्रयोग कर छे $(\cdot२६४१८)^{\frac{१}{३}}$ निकालो।

(१४) यदि स्प ५१°६' = १·२३९३ और स्प ५१°७' = १·२४०१ तो अनुपाती भागों के प्रनियम का प्रयोग कर स्प ५१°६'२५' की अर्हा निश्चित करो।

## चौदहवां अध्याय

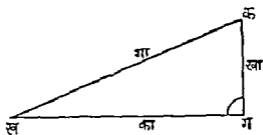
## त्रिभुजों का निर्धारण

१४·१ त्रिभुज की भुजाओं और कोणों को उसके अवयव (elements) कहते हैं। रैखिकी से यह ज्ञात है कि यदि किसी त्रिभुज के तीन अवयव दिए गए हों और उनमें कम से कम एक भुजा हो, तो उस त्रिभुज की रचना की जा सकती है। इसी प्रकार यदि त्रिभुज के तीन अवयव दिए हों और उनमें कम से कम एक भुजा हो तो उसके शेष तीन अवयव त्रिकोणमिति से निश्चित किए जा सकते हैं। इस विधा को त्रिभुज का निर्धारण कहते हैं।

पहले की भांति इस अध्याय में भी किसी भी त्रिभुज कखग की भुजाएं का, खा, गा और उसके कोण क, ख, ग से दर्शाए गए हैं।

पहले, लंब कोण त्रिभुजों के निर्धारण पर विचार किया जायगा। आने वाले अनुच्छेदों में ∠ग लम्बकोण लिया गया है।

१४·२ दशा १— दो भुजाओं के दिये जाने पर त्रिभुज का निर्धारण करना—

(१) मान लो, भुजाएं का, खा दी हुई हैं।

आ. १४.१

$$\text{स्प क} = \frac{\text{का}}{\text{खा}}$$

∴ छेस्प क = छे का − छे खा

क्योंकि का और खा भुजाएं दी हुई हैं, अतः छे स्प क प्राप्त होता है और इसलिए क ज्ञात किया जा सकता है।

और अब, कोण ख, संबंध

$$\text{ख} = 90^\circ - \text{क},$$

से ज्ञात किया जा सकता है।

कर्ण गा निम्नलिखित किसी भी संबंध से निश्चित किया जा सकता है—

$गा = \frac{का}{ज्या क}$, $गा = \frac{खा}{ज्या ख}$ अथवा, $गा = \sqrt{का^2 + खा^2}$

परन्तु संबंध, $गा = \sqrt{का^2 + खा^2}$, छेदाओं की गणना के लिए अनुपयुक्त है; अतः गा निश्चित करने के लिये $गा = \frac{का}{ज्या क}$, अथवा $गा = \frac{खा}{ज्या ख}$ संबंध का प्रयोग करना ठीक होगा।

(२) मान लो कर्ण गा और एक भुजा का दी हुई हैं। आकृति १४·१ देखो।

संबंध $ज्या क = \frac{का}{गा}$ से कोण क निश्चय किया जा सकता है।

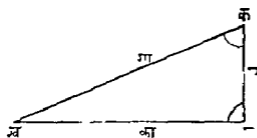
(इस समीकार को और आगे के सब समीकारों को सारणी की सहायता से सिद्ध करना पड़ता है।)

कोण क ज्ञात हो जाने पर, कोण $ख = (९०° - क)$ भी ज्ञात हो जाता है।

निम्नलिखित किसी भी संबंध से भुजा खा निश्चित की जा सकती है—

खा = गा.ज्या ख, अथवा खा = का.कोस्प क

अथवा $खा = \sqrt{गा^2 - का^2}$

१४·२१ दशा २— एक न्यून कोण और एक भुजा के दिए जाने पर त्रिभुज का निर्धारण करना—

(१) मान लो, कोण क और भुजा खा दिए हैं। शेष कोण ख संबंध ख = ९०° − क से ज्ञात होता है।

आ १४२

संबंध का = खा स्प क से भुजा का जानी जा सकती है।

संबंध गा = $\frac{\text{खा}}{\text{कोज्या क}}$ से कर्ण गा ज्ञात होता है।

(२) मान लो कोण क और कर्ण गा दिए हैं— आकृति १४·२ देखो।

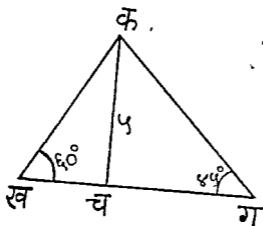
पहले की भांति कोण ख संबंध

ख = ९०° − क से ज्ञात होता है।

संबंध खा = गा. कोज्याक

का = गा. ज्याक से भुजाएं खा और का ज्ञात होती हैं।

१४·२२ ऊंचाई और दूरीयों (अध्याय १५) के निर्णय सिद्ध करने के लिए लंबकोण त्रिभुजों के निर्धारण के ज्ञान की आवश्यकता होती है।

१४·२३ उदाहरण— यदि त्रिभुज कखग में रेखा कच आधार खग पर लंब हो, और $\angle$ख $=$ ६०°, $\angle$ग $=$ ४५° और कच $=$ ५ हों, तो खा और गा निश्चित करो।

आ. १४·३

$\triangle$कचग में,

$$\text{ज्या ग} = \frac{\text{कच}}{\text{कग}}$$

$$\text{अथवा ज्या ४५°} = \frac{५}{\text{खा}}$$

$$\therefore \quad \text{खा} = ५\sqrt{२}$$

$\triangle$कखच में,

$$\text{ज्या ख} = \frac{\text{कच}}{\text{कख}}$$

अथवा ज्या $६०° = \frac{५}{गा}$

$$\therefore \quad गा = \frac{५·२}{\sqrt{३}} = \frac{१०\sqrt{३}}{३}$$

उदाहरण २— यदि त्रिभुज कखग में, क=९०°, खा=४·५ और गा=६·९ हो तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

ख

६·९

ग ४·५ क

आ. १४·४

$$स्प\ ख = \frac{खा}{गा}$$

$$= \frac{४·५}{६·९}$$

$$= \frac{४५}{६९}$$

$\therefore$ छे स्प ख = छे ४५ − छे ६९

= १·६५३२ − १·८३८८, छेदासारणी से

= −·१८५६

= $\bar{१}$·८१४४

छेद स्पर्शज्या सारणी से,

छे स्प ३३°७′ = $\bar{१}$·८१४५

$\therefore$ ख = ३३°७′ लगभग

$\therefore$ ग = ९०° − ख

= ९०° − ३३°७′

= ५६°५३′ लगभग

पुनः $\text{का} = \dfrac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$

अथवा $\text{का} = \dfrac{४\cdot१}{\text{ज्या } ३३°७'}$

$\therefore$ छे का = छे ४·१ − छे ज्या ३३°७′

= ·६५३२ − $\bar{१}$·७३७५, सारणी से

= ·६५३२ + १ − ·७३७५

= ·९१५७

= छे ८·२३५ प्रतिच्छेदा सारणी से

$\therefore$ का = ८·२३५

## प्रश्नावलि १९

(१) कखग एक लंब कोण त्रिभुज है, जिसमें ग लंबकोण है। यदि का = १२, खा = २√२, तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

(२) △ कखग में, क = ९०°, खा = ४०°, ग = १५° तो का और गा भुजायें निश्चित करो।

(३) यदि △ कखग में, $\angle$ग = ९०°, खा = ४·३, और गा = ८·६ हो तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

(४) यदि △ कखग में, $\angle$ख = ३०°, $\angle$ग = ४०° और खग भुजा पर खींचा गया लंब कच = ९ पाद तो कख, कग, कच और गच की लंबाइयां निकालो।

१४·३ अब त्रिभुजों के निर्धारण पर विचार किया जायगा।

यह तो ज्ञात ही है कि यदि किसी त्रिभुज के तीन अवयव दिए हों, जिनमें कम से कम एक भुजा हो, तो उस त्रिभुज का पूर्ण रूप से निर्धारण हो सकता है। ये तीन अवयव चार प्रकार से दिए जा सकते हैं—

दशा १— तीन भुजाएं
दशा २— दो भुजाएं और उनके बीच का कोण
दशा ३— एक भुजा और दो कोण
दशा ४— दो भुजाएं और उनमें से एक के सामने का कोण

जब त्रिभुज के केवल तीनों कोण दिए रहते हैं, तो त्रिभुज का निर्धारण सम्भव नहीं होता। इस दशा पर, पृथक रूप से, अनुच्छेद १४·८ में विचार किया गया है।

१४·४ दशा १— △कखग की तीनों भुजाएं दी गई हैं। क्योंकि का, खा, गा ज्ञात हैं, अतः राशियां सा $\left(=\frac{\text{का}+\text{खा}+\text{गा}}{२}\right)$, (सा − का), (सा − खा) और (सा − गा) भी ज्ञात हो जाती हैं।

अब $\quad \text{स्प}\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{खा})(\text{सा}-\text{गा})}{\text{सा}(\text{सा}-\text{का})}}$

$$\therefore \text{छे स्प}\frac{\text{क}}{2} = \frac{1}{2}\Big\{\text{छे}(\text{सा}-\text{खा}) + \text{छे}(\text{सा}-\text{गा}) - \text{छे सा} - \text{छे}(\text{सा}-\text{का})\Big\}$$

इस समीकार से $\frac{\text{क}}{2}$ और इसलिए क, सारणी की सहायता से, निश्चित किया जा सकता है।

इसी प्रकार, ख, स्प$\frac{\text{ख}}{2}$ के सूत्र से और ग, सूत्र, ग $= 180^\circ -$ क $-$ ख से निश्चित किए जा सकते हैं।

क्योंकि ज्या अ = ज्या $(180^\circ -$ अ) अतः किसी दी हुई ज्या वाले दो कोण होते हैं और वे परस्पर ऋजुपूरक होते हैं। इसलिए ज्या के सूत्रों से निश्चित किए गए त्रिभुज के अर्धकोणों की अर्हाएं सन्दिग्ध होती हैं और इसलिए कोणों को निश्चय करने के लिये इन सूत्रों का प्रयोग नहीं किया जाता।

परन्तु अर्धकोणों की कोटिज्या के सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है।

जैसे, $\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{\text{सा}(\text{सा}-\text{का})}{\text{खा}.\ \text{गा}}}$

और कोज्या $\frac{ख}{२} = \sqrt{\frac{गा(सा - खा)}{गा. का}}$

अतः इन सूत्रों की सहायता से $\frac{क}{२}$ और $\frac{ख}{२}$, बिना किसी सन्दिग्धता के ज्ञात किए जा सकते हैं।

परंतु इन सूत्रों के प्रयोग में सा, (सा – का), (सा – खा), का, खा, और गा इन ६ राशियों की छदाएं निश्चित करनी पड़ती हैं, जब कि स्पर्शज्या के सूत्रों के प्रयोग में केवल सा, (सा – का), (सा – खा) और (सा – गा), इन चार राशियों की छदाओं का निश्चय करने की आवश्यकता है।

इसलिए यदि तीनों कोणों का निश्चय करना हो तो स्पर्शज्या के सूत्रों का ही प्रयोग करना चाहिए; और यदि केवल एक ही कोण निश्चय करना है तो कोटिज्या और स्पर्शज्या के सूत्रों में से किसी का भी प्रयोग कर सकते हैं।

कोटिज्या नियम से भी कोण निश्चय किये जा सकते हैं।

इस प्रकार,

$$कोज्या\ क = \frac{खा^2 + गा^2 - का^2}{२\ खा.गा}$$

$$कोज्या\ ख = \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{२\ गा.का}$$

परन्तु ये सब छदा-गणना के लिये उपयोगी नहीं है और इनका प्रयोग तभी करना चाहिये जब का, खा और गा छोटी संख्याएं हों।

१४·४१ उदाहरण— यदि $\triangle$ कखग में, का = ४७, खा = ५३ और गा = २२, तो तीनों कोण निश्चित करो।

$$सा = \frac{४७+५३+२२}{२} = ६१$$

$$सा - का = ६१ - ४७ = १४$$
$$सा - खा = ६१ - ५३ = ८$$
$$सा - गा = ६१ - २२ = ३९$$

$$\therefore \quad स्प\frac{क}{२} = \sqrt{\frac{(सा - खा)\ (सा - गा)}{सा\ (सा - का)}}$$

$$= \sqrt{\frac{८ \times ३९}{६१ \times १४}}$$

$$\therefore \ छे\ स्प\frac{क}{२} = \frac{१}{२}\ \left\{छे ८ + छे ३९ - छे ६१ - छे १४\right\}$$

$$= \frac{१}{२}\ \left\{·९०३१ + १·५९११ - १·७८५३ - १·१४६१\right\} \text{ छेदासारणी से,}$$

$$= \frac{१}{२}\ \left(-·४३७२\right)$$

$= -.२१८६ = \bar{१}.७८१४$

$=$ छे स्प ३१°९′  छेदा-स्पर्शज्या सारणी से

$\therefore \quad \frac{क}{२} = ३१°९'$

$\therefore \quad क = ६२°१८'$

पुनः, $स्प \frac{ख}{२} = \sqrt{\frac{(सा - गा)\ (सा - का)}{सा\ (सा - खा)}}$

$= \sqrt{\frac{३९ \times १४}{६१ \times ८}}$

$छे\ स्प \frac{ख}{२} = \frac{१}{२} \left\{ छे\ ३९ + छे १४ - छे ६१ - छे ८ \right\}$

$= \frac{१}{२} \left\{ १.५९११ + १.१४६१ - १.७८५३ - .२०३१ \right\}$

$= \frac{१}{२}\ (.०४८८) = .०२४४$

अब, छेदा स्पर्शज्या सारणी से,

छे स्प ४६°३६′ = .०२४३

और छे स्प ४६°३७′ = .०२५६

$\therefore$ छे स्प $\frac{ख}{२}$, छे स्प ४६°३६′ और छे स्प ४६°३७′ के बीच है।

$\therefore \frac{ख}{२}$ की अर्हा ४६°३६' और ४६°३७' के बीच है।

मान लो $\frac{ख}{२}$ = ४६°३६'य"

तो य" के लिये अंतर = छे स्प $\frac{ख}{२}$ − छे स्प ४६°३६'

= ·०२४४ − ·०२४३

= ·०००१

और ६०" के लिये अंतर = छे स्प ४६°३७'

− छे स्प ४६°३६'

= ·०२४६ − ·०२४३

= ·०००३

अतः, $\frac{य}{६०} = \frac{·०००१}{·०००३} = \frac{१}{३}$

$\therefore$ य = $\frac{६०}{३}$ = २०

$\therefore$ $\frac{ख}{२}$ = ४६°३६'२०"

$\therefore$ ख = ९३°१२'४०"

$\therefore$ ग = १८०° − क − ख

= १८०° − ६२°१८' − ९३°१२'४०"

= २४°२९'२०"

## प्रश्नावलि २०

(१) किसी त्रिभुज की भुजायें ८, १० और १२ हैं, तो दिखाओ कि उसका महत्तम कोण उसके लघुतम कोण का दुगुना है।

(२) किसी त्रिभुज की भुजायें ७५३, ३७५ और ८७२ हैं, तो उसका लघुतम कोण निश्चित करो।

[मद्रास १८९७

(३) किसी त्रिभुज की भुजायें २ : ३ : ४ अनुपात में हैं; तो उस त्रिभुज का निर्धारण करो।

(४) किसी त्रिभुज की भुजायें ५७, १५ और ४८ पाद हैं तो सिद्ध करो कि उसका महत्तम कोण १२०°का है।

त्रिभुज कखग का निर्धारण करो, जब

(५) का = २२३, खा = २५६, गा = २८८

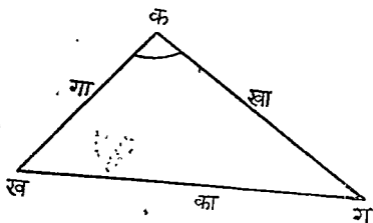
(६) $का = \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$, $खा = \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$, $गा = \frac{\sqrt{३}}{२}$

[बनारस १९३५

(७) का = २, $खा = \sqrt{३}+१$, $गा = \sqrt{६}$

(८) का = ३४·५६, खा = ४५·६६, गा = ५६·७८

[आंध्र १९४२

१४·५ दशा २— △कखग की दो भुजाएं और उनके बीच का कोण दिया गया है।

आ. १४·५

मान लो, गा और खा भुजाएं और उनके बीच का कोण क दिया हुआ है। मान लो इन दो भुजाओं में खा बड़ी है।

तो अनुच्छेद १०·६ से,

$$\text{स्प}\ \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \left(\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}\right)\ \text{कोस्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$\therefore\quad \text{छे स्प}\ \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \text{छे}\ (\text{खा}-\text{गा}) - \text{छे}\ (\text{खा}+\text{गा})$$

$$-\ \text{छे स्प}\ \frac{\text{क}}{२}\quad \ldots\ldots (१)$$

इसके अतिरिक्त $\frac{ख+ग}{२} = ९०^\circ - \frac{क}{२}$ ..........(२)

संबंध (१) और (२) से $\frac{ख-ग}{२}$ और $\frac{ख+ग}{२}$ प्राप्त होते हैं और इन के योग और वियोग से कोण ख और कोण ग प्राप्त होते हैं।

सूत्र, $\frac{का}{ज्या\ क} = \frac{खा}{ज्या\ ख}$

अथवा, छे का = छे खा + छे ज्या क − छे ज्या ख से का भुजा निश्चित की जा सकती है।

संबंध, $का^२ = खा^२ + गा^२ - २\ खा\ गा\ कोज्या\ क$ से मां का भुजा निश्चित की जा सकती है।

पहले की भांति, जब खा और गा छोटी संख्याएं हों, तभी इस सूत्र का प्रयोग करना चाहिए।

१४.५१ उदाहरण— किसी त्रिभुज की दो भुजाएं ७:५ निष्पत्ति में हैं और उनके बीच का कोण १०२°३६' है, तो उसके शेष कोण निकालो।

मान लो, $\frac{खा}{गा} = \frac{७}{५}$ और उनके बीच का कोण क=१०२°३६'

तो, स्प $\frac{ख-ग}{२} = \left(\frac{७-५}{७+५}\right)$ कोस्प $\left(\frac{१०२^\circ३६'}{२}\right)$

$$= \frac{१}{६} \text{ कोस्प } ५१^\circ १८'$$

$$= \frac{१}{६} \text{ स्प } ३८^\circ ४२'$$

$$\therefore \text{ छे स्प } \frac{ख - ग}{२} = \text{छे स्प } ३८^\circ ४२' - \text{छे } ६$$

$$= \bar{१}.९०३७ - .७७८२ \text{ सारणी से}$$

$$= \bar{१}.१२५५$$

सारणी से,

छे स्प $७^\circ ३६' = \bar{१}.१२५२$ और छे स्प $७^\circ ३७' = \bar{१}.१२६२$

$\therefore \quad \frac{ख - ग}{२}$, $७^\circ ३६'$ और $७^\circ ३७'$ के बीच है।

मान लो, $\frac{ख - ग}{२} = ७^\circ ३६' \, य''$

तो य″ के लिये अंतर $= \bar{१}.१२५५ - \bar{१}.१२५२ = .०००३$

और ६०″ के लिये अंतर $= \bar{१}.१२६२ - \bar{१}.१२५२ = .००१०$

$$\therefore \quad \frac{य}{६०} = \frac{.०००३}{.००१०} = \frac{३}{१०}$$

$$\therefore \quad य = १८$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२} = ७^\circ ३६' १८'' \qquad \ldots\ldots\ldots (१)$$

इसके अतिरिक्त $\dfrac{\text{ख} + \text{ग}}{२} = ९०^\circ - \dfrac{\text{क}}{२}$

$$= ९०^\circ - ५१^\circ १८'$$

$$= ३८^\circ ४२' \qquad \ldots\ldots\ldots (२)$$

(१) और (२) क योग और वियोग से,

ख $= ४६^\circ १८' १८''$

और ग $= ३१^\circ ५' ४२''$

## प्रश्नावलि २१

$\triangle$ कखग में,

(१) का $=२४२$, खा $=१६४$, $\angle$ग $=५४^\circ$ तो त्रिभुज का निर्धारण करो। [नागपुर १९४६

(२) का $=३$, खा $=१$, $\angle$ग $=५३^\circ ७' ४८''$ तो क और ख कोणों का निश्चय करो। [नागपुर १९५१

(३) यदि गा $=२१०$, का $=११०$, $\angle$ख $=३४^\circ ४२' ३०''$ तो ग और क कोणों का निश्चय करो। [नागपुर १९३२

(४) यदि का और खा भुजाएं १४:११ निष्पत्ति में हों और $स्प\frac{ग}{२} = \frac{१६}{१५}$ तो क और ख कोणों का निश्चय करो।

(५) यदि खा = २गा और $\angle$क = ६०° तो ख और ग तथा का और खा की निष्पत्तियां निकालो।

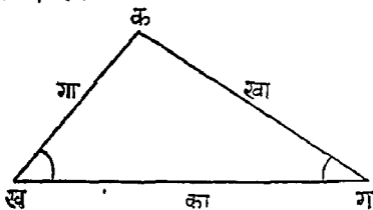
(६) यदि का = ३०, खा = २० और बीच का कोण गा = २२° तो शेष कोणों का निश्चय करो। [बनारस १९३२

(७) किसी त्रिभुज कखग में खा = २७, गा = २३, $\angle$क = ४४°३०′ तो ख और ग कोणों का निश्चय करो। [बनारस १९४१

(८) यदि खा = १३१, गा = ७२, $\angle$क = ४०° तो ख और ग कोण निकालो। [इलाहाबाद १९३८

(९) यदि खा और गा भुजाएं ७:३ निष्पत्ति में हों और बीच का कोण क = ६०° हो, तो कोण ख और ग निकालो। [इलाहाबाद १९४०

(१०) त्रिभुज कखग का निर्धारण करो, जिसमें, $खा = \sqrt{६}$, $गा = ३ - \sqrt{३}$ और $\angle क = ७५°$ (सूत्र $का^२ = खा^२ + गा^२ - २ खा \cdot गा \cdot$ कोज्या क का प्रयोग करो)

१४·६ दशा २— जब त्रिभुज की एक भुजा और दो कोण दिए हों।

आ· १४·६

मान लो दत्त भुजा और कोण क्रमशः का, ख और ग हैं।

क्योंकि कोण ख और ग ज्ञात हैं, अतः कोण क, समीकार क = १८०° — ख — ग से ज्ञात किया जा सकता है।

भुजा खा, समीकार खा = $\frac{\text{का ज्या ख}}{\text{ज्या क}}$ से निश्चित की जा सकती है।

दोनों पक्षों की छेदा लेने से इस समीकार का निम्नलिखित रूपान्तरण हो जाता है—

छे खा = छे का + छे ज्या ख — छे ज्या क

इसी प्रकार भुजा गा का निश्चय करने के लिए संबंध

गा = $\frac{\text{का· ज्या ग}}{\text{ज्या क}}$ है।

अथवा छे ग = छे का + छे ज्या ग − छे ज्या क है।

१४·६१. उदाहरण—△ कखग में, का = ४२७, ख = ३०°, ग = ७०°२५', तो त्रिभुज की लघुतम भुजा निकालो।

$$\angle क = १८०° - ख - ग$$
$$= १८०° - ३०° - ७०°२५'$$
$$= ७९°३५'$$

लघुतम कोण ख के सम्मुख की भुजा ही लघुतम होगी।

$$अब \quad खा = \frac{का \; ज्या \; ख}{ज्या \; क}$$

$$\therefore \quad खा = \frac{४९७ \; ज्या \; ३०°}{ज्या \; ७९°२५'}$$

$$= \frac{४९७}{२ \; ज्या \; ७९°२५'}$$

$\therefore$ छे खा = छे ४२७ − छे २ − छे ज्या ७९°२५'
= २·६९९४ − ·३०१० − $\bar{१}$·९९२५, सारणी से
= २·४०२९
= छे २५२·८ प्रतिच्छेदा सारणी से

$\therefore$ लघुतम भुजा = २५२·८

## प्रश्नावलि २२

$\triangle$ कखग में,

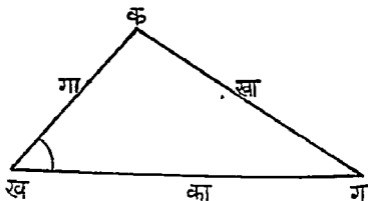
(१) का = $\sqrt{१३}$, ख = ४०°, ग = ६०°, तो खा, गा निकालो।

(२) का = २६२, क = ४५° १३′ और ख = ९९° २७′, तो ग, खा और गा का निश्चय करो। [नागपुर १९४३

(३) ख = ४५°, ग = १०° और गा = २०० पाद, तो खा निकालो। [पटना १९४०

(४) का = ३९, क = ८१° ३५′, ख = २७° ५५′, तो त्रिभुज का निर्धारण करो। [कलकत्ता १९३३

(५) का = १९, क = ५२° २८′ और ग = ९३° ४०′, तो खा निकालो। [पटना १९३६

१४·७ दशा ४.—जब त्रिभुज की दो भुजाएं और उनमें से एक के सम्मुख का कोण दिया है।

आ. १४·७

मान लो भुजाएँ खा और गा तथा खा के सम्मुख का कोण ख दिया हुआ है।

$$\text{संबंध, ज्या ग} = \frac{\text{गा} \cdot \text{ज्या ख}}{\text{खा}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(१)$$

से छेदा लेकर कोण ग निश्चय किया जा सकता है।

इसके पश्चात् संबंध क = १८०° – ख – ग से कोण क प्राप्त होता है।

$$\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{संबंध का} = \frac{\text{खा} \cdot \text{ज्या क}}{\text{ज्या ख}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

से शेष भुजा 'का' निकाली जा सकती है।

१४·७१ पिछले अनुच्छेद में, समीकार (१) से, ऊपर दिए हुए अवयवों की महत्ता के अनुसार, ग की कभी कोई भी अर्हा नहीं मिलती, कभी केवल एक और कभी दो।

इन भिन्न २ दशाओं पर यहां विचार किया जायगा। प्रथम, मान लो कि दत्त कोण ख न्यून है।

(अ) यदि खा < गा· ज्या ख हो, तो $\frac{\text{गा.ज्या ख}}{\text{खा}} > १$, अर्थात् ज्या ग > १। अतः कोण ग की कोई भी अर्हा सम्भव

नहीं है और दत्त अवयवों से कोई त्रिभुज नहीं बन सकता।

(आ) यदि खा = गा. ज्या ख, तो $\frac{\text{गा. ज्या ख}}{\text{खा}} = १$

अर्थात् ज्या ग = १, अतः <ग = ९०°। इसलिए कोण ग की केवल एक ही अर्हा (अर्थात् ९०°) प्राप्त होती है और त्रिभुज लंबकोण त्रिभुज है।

(इ) यदि खा > गा ज्या ख, तो $\frac{\text{गा ज्या ख}}{\text{खा}} < १$,

अर्थात् ज्या ग < १। इसलिए कोण ग की दो अर्हाएं हैं जिनमें से एक न्यूनकोण और दूसरी अधिककोण है और वे परस्पर ऋजुपूरक हैं।

परन्तु ये दो अर्हाएं सदा ग्राह्य (admissible) नहीं होतीं। नीचे (इ) की उपदशाओं पर विचार किया गया है।

(इ$_1$) यदि खा > गा तो ख > ग
परन्तु दत्त कोण ख न्यून है; अतः कोण ग भी न्यून होना चाहिए। इस कारण ग की अधिककोण वाली अर्हा ग्राह्य नहीं है। इसलिए ग की केवल एक ही अर्हा है।

(इ$_2$) यदि खा = गा, तो ख = ग, इसलिए इस दशा में भी ग की केवल न्यूनकोण वाली अर्हा ही ग्राह्य है।

($इ_3$) यदि खा<गा तो ख<ग
इस दशा में ग की दोनों अर्हाएं ग्राह्य हैं। इसलिए का की भी दो संवादी अर्हाएं होंगी और संबंध (२) से का की भी दो अर्हाएं प्राप्त होती है।

इस दशा में दत्त प्रतिबंधों का समाधान करने वाले दो त्रिभुज होते हैं।

अब मान लो दत्त कोण ख अधिक कोण है।

(अ') यदि खा<गा, तो ख<ग, अतः ग भी अधिक कोण है। अतः इस दशा में कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

(आ') यदि खा=गा, तो ख=ग; इसलिए ग भी अधिक कोण है। अतः, इस दशा में भी कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

(इ') यदि खा>गा, तो ख>ग। इसलिए समीकार (१) से प्राप्त की हुई ग की केवल न्यून अर्हा ही ग्राह्य है। अतः केवल एक ही त्रिभुज संभव है।
अब उपलब्ध फलों को संक्षेप में संकलित किया जाता है—

(१) यदि खा<गा.ज्याख, तो एक भी त्रिभुज संभव नहीं है।

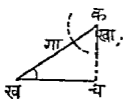
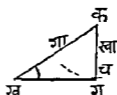
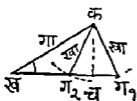
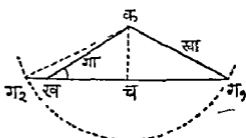
(२) यदि खा=गा.ज्याख, तो एक लंबकोण त्रिभुज बनता है।

(३) यदि खा>गा.ज्याख और<गा तथा कोण ख न्यून हो, तो दो त्रिभुज संभव हैं।

(४) यदि खा>गा अथवा=गा अर्थात् आवश्यक रूप से खा>गा.ज्याख और ख न्यूनकोण हो, तो एक ही त्रिभुज संभव है जिसमें कोण ग न्यून होगा।

(५) यदि ख अधिक कोण है, तो ऐसी दशा को छोडकर जिसमें खा>गा, अन्य दशाओं में कोई त्रिभुज नहीं बनाया जा सकता।

क्योंकि खा, गा और ख की कुछ विशिष्ट अर्हाओं के लिये त्रिभुज को निश्चित करने में संदेह उत्पन्न होता है, अतः इस प्रकार की दशा को त्रिभुज के निर्धारण की संदिग्ध दशा (ambiguous case of solution of triangles) कहते हैं।

१४·७२ रैखिक य विधि से संदिग्ध दशा पर विचार—

आकृति १ आकृति २ आकृति ३ आकृति ४

आ. १४·८

खा, गा और ख अवयवों की सहायता से त्रिभुज को खींचने का प्रयत्न करो। कख = गा लेकर ∠कखच = दत्त कोण ख बनाओ। तीसरा शीर्ष ग, खच रेखा पर क बिंदु से खा दूरी पर होगा। इसलिए क को केंद्र मानकर खा त्रिज्या का एक वृत्त चाप खींचो।

खच पर लंब कच खींचो; तो कच = गा·ज्या ख
इस प्रकार ये दशायें उत्पन्न होती हैं—

(१) यदि खा < गा.ज्या ख अर्थात् <कच, तो वृत्त चाप, रेखा खच को नहीं काटेगा और रचना असफल होगी इस दशा में कोई भी त्रिभुज संभव नहीं है। (आकृति १)

(२) यदि खा = गा ज्या ख, अर्थात् = कच तो वृत्त-चाप, खच रेखा का च बिंदु पर स्पर्श करता है। अतः त्रिभुज कखच अथवा कखग प्राप्त होता है जिसमें ग बिंदु पर का कोण लम्बकोण है। (आकृति २)

(३) यदि खा > गा ज्या ख, अर्थात् > कच, परन्तु <गा तो वृत्त चाप, रेखा खच का $ग_१$ और $ग_२$ दो विन्दुओं पर छेदन करता है। ये ख के एक ही पार्श्व में होते हैं। इस दशा में, दत्त अवयवों से, दो त्रिभुज $कखग_१$, $कखग_२$ बनते हैं। (आकृति ३)

(४) यदि खा > गा और इसलिए आवश्यक रूप से खा > गा.ज्या ख, अर्थात् > कच तो वृत्तचाप, रेखा खच का $ग_१$ और $ग_२$ दो विन्दुओं पर छेदन करता है। ये ख के विरुद्ध पार्श्वों में होते हैं। परन्तु इस दशा में, दत्त अवयवों से,

केवल एक ही त्रिभुज कखग, बनता है; क्योंकि दूसरे त्रिभुज कखग, में ग पर का कोण (१८०° – ख) के सम है और इसलिए यह त्रिभुज दत्त प्रतिबंधों का समाधान नहीं करता।

यदि खा = गा, तो विंदु ख और ग, संपाती होते हैं, और केवल एक ही त्रिभुज प्राप्त होता है। (आकृति ४)

यदि ख अधिककोण हो, तो इसके लिए उपयुक्त आकृतियां बनाने से यह स्पष्ट हो जायगा कि जब खा < गा अथवा खा = गा, तो कोई भी त्रिभुज नहीं बनता, और जब खा > गा, तो केवल एक ही त्रिभुज बनता है।

१४.७३ बीजीय विधि से संदिग्ध दशा पर विचार— अनुच्छेद १४·७ की आकृति से,

$$खा^2 = गा^2 + का^2 - २\ गा \cdot का \cdot कोज्या\ ख$$

यदि खा, गा और ख दिए हों तो 'का' निश्चित करना।

ऊपर दिया हुआ संबंध 'का' में वर्गसमीकार है जो इस रूप में लिखा जा सकता है:—

$$का^2 - २\ गा.\ कोज्या\ ख.\ का + (गा^2 - खा^2) = ०$$

$$\therefore\ का = \frac{२गा.कोज्या ख \pm \sqrt{४गा.^2कोज्या^2ख - ४(गा^2 - खा^2)}}{२}$$

$$अथवा\ का = गा.\ कोज्या\ ख \pm \sqrt{खा^2 - गा^2ज्या^2ख}$$ ............(अ)

(१) यदि खा $<$ गा.ज्या ख, तो

$\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\text{ज्या}^2\text{ख}}$ एक काल्पनिक (imaginary) राशि है; और (अ) से 'का' की एक भी वास्तविक अर्हा प्राप्त नहीं होती। इसलिए इस दशा में एक भी त्रिभुज संभव नहीं है।

(२) यदि खा = गा.ज्या ख, तो समीकार के दोनों मूल वास्तविक और समान हो जाते हैं; और का = गा कोज्या ख हो जाता है। अतः इस दशा में केवल एक ही त्रिभुज प्राप्त होता है जो लवकोण त्रिभुज होता है।

(३) यदि खा $>$ गा.ज्या ख, तो का की दो वास्तविक और भिन्न अर्हाएं मिलती हैं। परन्तु ये अर्हाएं उसी दशा में ग्राह्य हो सकती हैं जब ये दोनों धन चिह्न युक्त हों क्योंकि 'का' आवश्यक रूप से धन होता है।

का की दो अर्हाओं में से

गा कोज्या ख + $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\text{ज्या}^2\text{ख}}$ ही धन है;

और दूसरी अर्हा गा.कोज्या ख $-$ $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\text{ज्या}^2\text{ख}}$ तभी धन होगी,

जब $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\text{ज्या}^2\text{ख}} <$ गा कोज्या ख

जब खा$^2$ $-$ गा$^2$ ज्या$^2$ ख $<$ गा$^2$ कोज्या$^2$ ख

जब खा$^2$ $<$ गा$^2$ (कोज्या$^2$ ख + ज्या$^2$ ख)

जब खा$^2$ $<$ गा$^2$

जब खा $<$ गा

अतः यदि खा > गा.ज्या ख और < गा हो, तो दो त्रिभुज संभव हैं।

(४) यदि खा > गा तो का की एक अर्हा

गा कोज्या ख $-$ $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ज्या}^2 \text{ख}}$, ऋण हो जाती है और इसका संवादी त्रिभुज नहीं बनता। अतः, का की धन अर्हा का संवादी केवल एक ही त्रिभुज बनता है।

यदि खा = गा, तो का की एक अर्हा शून्यसम हो जाती है और इस अर्हा का संवादी त्रिभुज नहीं बनता। अतः का की दूसरी अर्हा अर्थात् २ गा.कोज्या ख का संवादी केवल एक ही त्रिभुज बनता है।

(५) यदि ख अधिक कोण हो तो गा कोज्या ख ऋण होता है। अतः गा की एक अर्हा गा.कोज्या ख $-\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ज्या}^2 \text{ख}}$ सदा ऋण रहती है और इसका संवादी त्रिभुज असंभव है।

दूसरी अर्हा तभी धन होगी,

जब गा कोज्या ख $+ \sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ज्या}^2 \text{ख}} > 0$

जब $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ज्या}^2 \text{ख}} > -$ गा कोज्या ख

जब $\text{खा}^2 > \text{गा}^2 \text{कोज्या}^2 \text{ख} + \text{गा}^2 \text{ज्या}^2 \text{ख}$

जब खा > गा

इसलिए यदि ख अधिककोण हो और खा < गा अथवा खा = गा, तो एक भी त्रिभुज नहीं बन सकता और यदि खा > गा, तो केवल एक त्रिभुज बन सकता है।

१४·७४ उदाहरण १— $\triangle$ कखग में, खा = ४१, गा = ६० और ख = २८°३०' तो सिद्ध करो कि यह त्रिभुज के निर्धारण की संदिग्ध दशा है। त्रिभुज क शेष कोण निकालो।

दत्त कोण ख न्यून है; इसलिए यह दशा संदिग्ध तभी होगी,

जब खा > गा ज्या ख और < गा

जब ४१ > ६० ज्या २८°३०' और < ६०

सारणी से, ज्या २८°३०' = ·४७७२

यदि ४१ > ६० × ·४७७२ और < ६० तो दशा संदिग्ध रहेगी।

क्योंकि, ४१ > २८·६३२ और < ६० सत्य है,

अतः यह संदिग्ध दशा है।

$$\text{ज्या ग} = \frac{\text{गा.ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{६० \times \text{ज्या } २८°३०'}{४१}$$

$\therefore$ छे ज्या ग = छे ६० + छे ज्या २८°३०' − छे ४१

= १·७७८२ + $\bar{१}$·६७८७ − १·६१२८

= $\bar{१}$·८४४१

= छे ज्या ४४°१८'

$\angle$ग = ४४°१८' अथवा $\angle$ग = १८०° − ४४°१८'

= १३५°४२'

इसलिए अनुच्छेद १४·७२ की आकृति से,

$\angle ग_1 = ४४^\circ१८'$, $\angle ग_2 = १३५^\circ४२'$

ग की इन दो अर्हाओं की संवादी क की भी दो अर्हाएं रहेंगी।

$क_1 = \angle खकग_1 = १८०^\circ - २८^\circ३०' - ४४^\circ१८' = १०७^\circ१२'$

और

$क_2 = \angle खकग_2 = १८०^\circ - २८^\circ३०' - १३५^\circ४२' = १५^\circ४८'$

उदाहरण २— यदि खा, गा, ख दिए हों और संदिग्ध दशा में तीसरी भुजा "का" की अर्हाएं क्रमशः $का_1$ और $का_2$ हों तो सिद्ध करो कि

(१) $का_1 + का_2 = २गा.कोज्या\ ख$

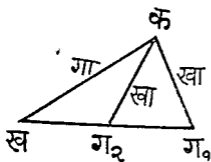
(२) $कोज्या \frac{क_1 - क_2}{२} = \frac{गा}{खा} ज्या\ ख$

[इलाहाबाद १९५१

सूत्र, $कोज्या\ ख = \frac{गा^२ + का^२ - खा^२}{२ गा.का}$ से

$का^२ - २\ गा.कोज्या\ ख.का + (गा^२ - खा^२) = ०$

इस समीकार के मूल $का_1$ और $का_2$ हैं इसलिए वर्ग समीकार के सिद्धान्तानुसार,

$का_1 + का_2 = २गा.कोज्या\ ख$ ..................(१)

क

गा खा खा

ख ग₂ ग₁

आ. १४·९

अब,

$$\text{क}_1 + \text{ख} + \text{ग}_1 = १८०^\circ$$

और

$$\text{क}_2 + \text{ख} + \text{ग}_2 = १८०^\circ$$

$\therefore$ योग से, $(\text{क}_1 + \text{क}_2) + २\text{ख} + (\text{ग}_1 + \text{ग}_2) = ३६०^\circ$

परन्तु $\text{ग}_1, \text{ग}_2$ ऋजुपूरक कोण हैं;

अतः $\text{ग}_1 + \text{ग}_2 = १८०^\circ$

$\therefore \quad \text{क}_1 + \text{क}_2 = १८०^\circ - २\text{ख}$

अथवा, $\dfrac{\text{क}_1 + \text{क}_2}{२} = ९०^\circ - \text{ख}$ ......(अ)

$\triangle$कखग$_1$ से, $\dfrac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \dfrac{\text{का}_1}{\text{ज्या क}_1}$

$\triangle$कखग$_2$ से, $\dfrac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \dfrac{\text{का}_2}{\text{ज्या क}_2}$

$$\therefore \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{का}_1}{\text{ज्या क}_1} = \frac{\text{का}_2}{\text{ज्या क}_2} = \frac{\text{का}_1 + \text{का}_2}{\text{ज्या क}_1 + \text{ज्या क}_2}$$

$$= \frac{२\,\text{गा.कोज्या ख}}{२\,\text{ज्या}\dfrac{\text{क}_1 + \text{क}_2}{२}\text{कोज्या}\dfrac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{२}},$$

संबंध (१) से

$$= \frac{\text{गा.कोज्या ख}}{\text{ज्या } (९०° - \text{ख}) \text{ कोज्या } \frac{\text{क}_१ - \text{क}_२}{२}},$$

संबंध (अ) से

$$= \frac{\text{गा.कोज्या ख}}{\text{कोज्या ख.कोज्या } \frac{\text{क}_१ - \text{क}_२}{२}}$$

$$= \frac{\text{गा}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}_१ - \text{क}_२}{२}}$$

$$\therefore \text{कोज्या} \frac{\text{क}_१ - \text{क}_२}{२} = \frac{\text{गा.ज्या ख}}{\text{खा}}$$

उदाहरण— रैखिकीय विधिसे सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या } \frac{\text{क}_१ - \text{क}_२}{२} = \frac{\text{गा.ज्या ख}}{\text{खा}}$$

## प्रश्नावलि २३

(१) यदि

(१) खा = २५, गा = १६, ख = ११५°६'

(२) खा = २२, गा = ३३, ख = ३०°४२'

(३) खा = ७, गा = ७, ख = १२०°

(४) खा = ४√२, गा = ८, ख = ४५°

तो किस दशा में

(अ) एक भी त्रिभुज न बनेगा ?

(आ) एक ही त्रिभुज बनेगा ?

(इ) दो त्रिभुज बनेंगे ?

संभाव्य त्रिभुजों का निर्धारण भी करो।

(२) यदि गा = ४७·२३, का = ५६·५५ और ग = ४८°३०' तो सिद्ध करो कि त्रिभुज कखग का निर्धारण संदिग्ध है। सारणी की सहायता से उसका निर्धारण करो।

[नागपुर १९४२

(३) निम्नलिखित दशाओं में से कारण देते हुए संदिग्ध दशाएं निकालो और सारणी की सहायता से उनका निर्धारण करो।

(१) क = ३०°, गा = २५० पाद, का = १२५ पाद

(२) क = ३०°, गा = २५० पाद, का = २०० पाद

[पटना १९४२

(४) एक त्रिभुज में एक कोण ११२°३' है। उसके सम्मुख की भुजा ५७३ पाद है और एक दूसरी भुजा ३२४ पाद है, तो अन्य दो कोणों का निश्चय करो।

[इलाहाबाद १९३९

(५) यदि का = २, खा = $\sqrt{३}+१$, क = ४५° तो $\triangle$ कखग का निर्धारण करो।

[मैसूर १९४३

(६) यदि का = ३६०, खा = २८५, क = ३४°, तो △ कखग का निर्धारण करो। [त्रावणकोर १९४३

(७) सिद्ध करो कि जब खा, गा और ख दिए हों और त्रिभुज का निर्धारण संदिग्ध हो तो का की दो अर्हाओं का अन्तर $२\sqrt{खा^२ - गा^२ ज्या^२ख}$ है।

(८) यदि खा, गा और ख दिए हों और संदिग्ध दशा में तीसरी भुजा का की अर्हाएं $का_१$, $का_२$ हों और $का_१ > का_२$ हो, तो सिद्ध करो कि

(१) $का_१ - का_२ = २$ खा.कोज्या ग [बनारस १९२८

(२) $(का_१ - का_२)^२ + (का_१ + का_२)^२ स्प^२ख = ४खा^२$

(३) $का_१^२ + का_२^२ - २\, का_१ का_२$ कोज्या २ख

$= ४खा^२ कोज्या^२ख$

[बनारस १९३५

१४·८ अब उस दशा पर विचार किया जायगा जिसमें त्रिभुज के तीनों कोण दिए गए हों। इसका उल्लेख अनुच्छेद १४·३ में किया गया है।

इस दशा में, सूत्र $\frac{का}{ज्या\ क} = \frac{खा}{ज्या\ ख} = \frac{गा}{ज्या\ ग}$ के अनुसार तीनों भुजाओं का परस्पर अनुपात निश्चित किया जा सकता है। परन्तु इससे उनकी वास्तविक लंबाइयां ज्ञात नहीं हो सकतीं और त्रिभुज का निर्धारण नहीं हो सकता। इस दशा

में दिए कोणों वाले असंख्य त्रिभुज बन सकते हैं और वे सब परस्पर समरूप (similar) होंगे।

१४·९ दूसरे न्यासों (data) से त्रिभुजों का निर्धारण— त्रिभुज की भुजाओं और उनके कोणों के स्थान में यदि अन्य न्यास दिए हों, तो भी त्रिभुज का निर्धारण हो सकता है। इन उदाहरणों में इसकी रीति दर्शाई गई है।

उदाहरण १— यदि गा, का + खा और ग दिए हों तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

$$\frac{\text{का} + \text{खा}}{\text{गा}} = \frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{२\text{ज्या}\frac{\text{क}+\text{ख}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}}{\text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}}{२\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}}{\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}}$$

## प्रश्नावलि २४

(१) एक त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेढी में हैं और लघुतम कोण ३०° का है। दिखाओ कि त्रिभुज की महत्तम भुजा लघुतम भुजा की दुगुनी है।

(२) किसी त्रिभुज के कोण १ : ५ : ६ के अनुपात में हैं। तो सिद्ध करो कि उसकी भुजाएं $\sqrt{3}-1 : \sqrt{3}+1 : 2\sqrt{2}$ के अनुपात में होंगी।

(३) यदि △ कखग में,

$$\text{कोज्या क} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ और कोज्या ग} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

तो का, खा, गा का अनुपात निकालो।

(४) किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेढी में हैं और उसकी लघुतम और महत्तम भुजाओं की लम्बाइयां क्रमशः १६ और २४ हैं तो त्रिभुज का निर्धारण करो। [पटना १९३९

(५) किसी त्रिभुज की दो भुजाएं ६५ और २५ हैं और उनके सम्मुख के कोणों का अन्तर ६०° का है। तो उसके सब कोण निकालो।

[इलाहाबाद १९४२

(६) यदि △ कखग में
(का + खा + गा) (खा + गा − का) = खा.गा तो क निकालो।

$$\therefore \text{कोज्या}\frac{\text{क}-\text{ख}}{२} = \frac{\text{का}+\text{खा}}{\text{गा}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

इस संबंध से $\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}$ ज्ञात हो जाता है।

और $\frac{\text{क}+\text{ख}}{२}$ संबंध $\frac{\text{क}+\text{ख}}{२} = ९०^\circ - \frac{\text{ग}}{२}$ से ज्ञात हो जाता है।

इसलिए कोण क और ख निकाले जा सकते हैं।

कोण क और ख तथा भुजा गा के ज्ञात होने के कारण अब निर्णय का साधन तीसरी दशा के समान हो सकता है।

उदाहरण २— यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों से सम्मुख की भुजाओं पर खींचे गए लंबों की लम्बाइयां दी हों तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

मान लो शीर्ष क, ख, ग से सम्मुख की भुजाओं पर खींचे गए लंबों की लंबाइयां क्रमशः $\text{ल}_१$, $\text{ल}_२$, $\text{ल}_३$ हैं।

तो, $\text{का}\cdot\text{ल}_१ = \text{खा}\cdot\text{ल}_२ = \text{गा}\cdot\text{ल}_३ = २\triangle$

$$\therefore \frac{\text{का}}{\frac{१}{\text{ल}_१}} = \frac{\text{खा}}{\frac{१}{\text{ल}_२}} = \frac{\text{गा}}{\frac{१}{\text{ल}_३}}$$

तीनों भुजाओं का अनुपात ज्ञात होने पर इस निर्णय का साधन दशा १ के समान हो सकता है।

# प्रश्नावलि २४

(१) एक त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेढी में हैं और लघुतम कोण ३०° का है। दिखाओ कि त्रिभुज की महत्तम भुजा लघुतम भुजा की दुगुनी है।

(२) किसी त्रिभुज के कोण १ : ५ : ६ के अनुपात में हैं। तो सिद्ध करो कि उसकी भुजायें √३ − १ : √३ + १ : २ √२ के अनुपात में होंगी।

(३) यदि △ कखग में,

$$\text{कोज्या क} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ और कोज्या ग} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

तो का, खा, गा का अनुपात निकालो।

(४) किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेढी में हैं और उसकी लघुतम और महत्तम भुजाओं की लम्बाइयां क्रमशः १६ और २४ हैं तो त्रिभुज का निर्धारण करो। [पटना १९३९

(५) किसी त्रिभुज की दो भुजाएं ६५ और २५ हैं और उनके सम्मुख के कोणों का अन्तर ६०° का है। तो उसके सब कोण निकालो।

[इलाहाबाद १९४२

(६) यदि △ कखग में
(का + खा + गा) (खा + गा − का) = खा.गा तो क निकालो।

(७) यदि ग = ६०°, का − खा = १ और का.खा = २० तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

(८) यदि का = ३२ पाद, खा + गा = १०६ पाद और ∠ग = १३२° ३४′, तो त्रिभुज का निर्धारण करो। [नागपुर १९४३

[उद्देशक (hint)— इस सूत्र का प्रयोग करो

$$(\text{का} - \text{खा} + \text{गा})\,\text{स्प}\frac{\text{ख}}{२} = (\text{का} + \text{खा} - \text{गा})\,\text{स्प}\frac{\text{ग}}{२}$$ ]

(९) यदि का = ८७ पाद, गा − खा = १९ पाद और ∠ख = ५७°, तो कोण क और भुजा खा निकालो। [नागपुर १९४०

[उद्देशक— इस सूत्र का प्रयोग करो

$$(\text{का} - \text{खा} + \text{गा})\text{स्प}\frac{\text{ख}}{२} = (\text{का} + \text{खा} - \text{गा})\text{स्प}\frac{\text{ग}}{२}$$ ]

(१०) उस त्रिभुज की भुजाएं 'निश्चित' करो जिसमें क = ६२°, क = ४३° और जिसका क्षेत्रफल = ५४० वर्ग एकक। [नागपुर १९४५

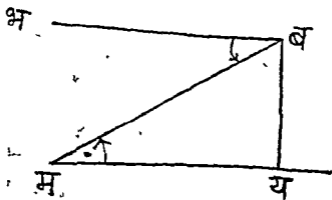
[उद्देशक— इस सूत्र का प्रयोग करो

$$\Delta = \frac{१}{२}\text{का}^{२}\text{ज्याख. ज्याग. व्युज्या क}$$ ]

## पन्द्रहवां अध्याय

# ऊंचाईयां और दूरियां

(heights and distances)

१५·१ परिभाषा— मान लो म और व दो विन्दु हैं और व विन्दु म विन्दु से उच्चतर समतल (level) पर है; और

आ. १५·१

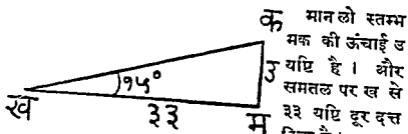
म विन्दु से खींची हुई क्षैतिज (horizontal) रेखा व विन्दु से खींची गई उदग्र (vertical) रेखा का य विंदु पर छेदन करती है।

यम रेखा के समांतर यभ खींचो। म विंदु से य विंदु की ओर देखने से यम रेखा मय क्षैतिज रेखा से जो कोण यमव बनाती है, उसे म विंदु पर य विंदु का उन्नतिकोण (angle of elevation) कहते हैं, और य विंदु से म विंदु की ओर देखने से मय रेखा, यभ क्षैतिज रेखा से जो कोण भयम बनाती है, उसे य विंदु पर म विंदु का अवनतिकोण (angle of depression) कहते हैं।

१५·२ यदि सम्बन्धित अवनति कोण, उन्नति कोण और अन्य आवश्यक कोण तथा दूरियां ज्ञात हों तो दिए गए विन्दु और अन्य विन्दुओं के बीच की ऊंचाईयां और दूरियां या किसी मस्थाणु (tower) अथवा स्तूप (pyramid) आदि की ऊंचाईयां त्रिकोणमिति से निश्चित की जा सकती हैं।

उन्नति कोण, अवनति कोण और इस प्रकार के अन्य आवश्यक कोणों का मापन करने के लिए षष्ठक (sextant) और त्रिकोणमान (theodolite) यन्त्रों का उपयोग किया जाता है।

१५·३ अब ऊंचाई और दूरी से सम्बद्ध कुछ निर्मेयों (problems) का साधन किया जायगा।

उदाहरण १— क्षैतिज समतल पर स्थित किसी स्तम्भ के आधार से ३३ यष्टि दूर समतल के एक विन्दु पर स्तम्भ के शिखर का उन्नति कोण १५° है। तो स्तम्भ की ऊंचाई का निश्चय करो।

मान लो स्तम्भ मक की ऊंचाई उ यष्टि है। और समतल पर ख से ३३ यष्टि दूर दत्त विन्दु है। क, ख को मिलाओ।

आ १५·२

तो △ मकख में,

$\angle$ मखक $= १५^\circ$

और $\frac{मक}{मख} =$ स्प $१५^\circ$,

अर्थात् $\frac{उ}{३३} =$ स्प $१५^\circ$

$$= \frac{\sqrt{३} - १}{\sqrt{३} + १} = २ - \sqrt{३}$$

$\therefore$ उ $= (२ - \sqrt{३})$ ३३ यष्टि.

उदाहरण २— भूमि के किसी विन्दु पर किसी पहाड़ी के शिखर का उन्नति कोण कोस्प$^{-१}$ $\frac{७}{९}$ है। यदि इस विन्दु से पहाड़ी की ओर ७२ पाद दूर नये विन्दु पर शिखर का उन्नति कोण कोस्प$^{-१}$$\frac{१}{३}$ है तो पहाड़ी की ऊंचाई का निश्चय करो।

आ. १५·१

मान लो म पहाड़ी का आधार और ग उसका शिखर है और मग = उ पाद। मान लो पहला बिन्दु क है। अतः $\angle$ गकम = $\angle$ अ $=$ कोस्प$^{-1}$ $\frac{७}{९}$

और दूसरा बिन्दु ख है।

अतः कख = ७२ पाद

और $\angle$ गखम = आ = कोस्प$^{-1}$ $\frac{१}{३}$

$\triangle$ कमग से,

$$\frac{७}{९} = \text{कोस्प अ} = \frac{\text{कम}}{\text{उ}}$$

$\triangle$ खमग से,

$$\frac{१}{३} = \text{कोस्प आ} = \frac{\text{खम}}{\text{उ}}$$

$$\therefore \quad \text{खम} = \frac{\text{उ}}{३}, \ \text{कम} = \frac{७\text{उ}}{९}$$

परन्तु कख = कम − खम

और कख = ७२ पाद

$$\therefore \quad ७२ = \frac{७\text{उ}}{९} - \frac{\text{उ}}{३} = \frac{४\text{उ}}{९}$$

$$\therefore \quad \text{उ} = १८ \times ९$$

$$= १६२ \text{ पाद}$$

उदाहरण ३— समुद्रतल से ३००′ ऊंची चट्टान पर, समुद्र पर स्थिर (at rest) दो जलयानों के अवनति कोण क्रमशः ३०° और ६०° हैं। यदि दोनों जलयान और चट्टान का आधार एक ही सरल रेखा में हो, तो जलयानों के बीच की दूरी का निश्चय करो।

मान लो चट्टान मग का आधार म और शिखर ग है। क और ख जलयान हैं और क, ख, म एक ही सरल रेखा में हैं। गभ रेखा, मक रेखा के समांतर खींचो।

आ १५·४

प्रश्नानुसार

$$\angle \text{भगक} = ३०^\circ,$$
$$\angle \text{भगख} = ६०^\circ$$
और $\quad$ मग = ३०० पाद

$$\therefore \quad \angle \text{गकम} = ३०^\circ$$
और $\quad \angle \text{गखम} = ६०^\circ$

मान लो अपेक्षित दूरी कख = य पाद

लंबकोण त्रिभुज कमग से,

$$\frac{\text{मग}}{\text{कग}} = \text{ज्या}३०^\circ$$

अथवा $\quad \frac{३००}{\text{कग}} = \frac{१}{२}$

$$\therefore \text{कग} = ६०० \text{ पाद}$$

$\triangle$ कखग से,

$$\frac{\text{कख}}{\text{ज्या कगख}} = \frac{\text{कग}}{\text{ज्या कखग}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{य}}{\text{ज्या}३०^\circ} = \frac{६००}{\text{ज्या}(\text{प्या} - ६०^\circ)}$$

$$\text{अथवा य} = \frac{६०० \times \frac{१}{२}}{\frac{\sqrt{३}}{२}} \text{ पाद}$$

$$=\frac{६००}{\sqrt{३}} \text{ पाद}$$

$$=२००\sqrt{३} \text{ पाद}$$

उदाहरण ४— किसी प्रस्थाणु के आधार के दक्षिण में स्थित किसी बिन्दु क पर, प्रस्थाणु के शीर्ष का उन्नति-कोण ६०° है और क की पश्चिम दिशा में किसी बिन्दु ख पर शीर्ष का उन्नति कोण ४५° है। यदि कख = २७० पाद हो तो प्रस्थाणु की ऊंचाई का निश्चय करो।

आ १५·५

मान लो प्रस्थाणु मग है और म की दक्षिण दिशा में बिन्दु क पहले अवलोकन (observation) का स्थान है।

$\angle$ मकग = ६०°

विन्दु ख, जो क की पश्चिम दिशा में उससे २७० पाद दूर है, दूसरे अवलोकन का स्थान है।

$\angle$ मखग = ४५°

मान लो प्रस्थाणु की ऊंचाई उ पाद है।

तो त्रिभुज मकग से,

$$\frac{\text{मग}}{\text{मक}} = \text{स्प } ६०°$$

अथवा $\frac{\text{उ}}{\text{मक}} = \sqrt{३}$

$$\therefore \text{ मक} = \frac{\text{मग}}{\sqrt{३}} = \frac{\text{उ}}{\sqrt{३}}$$

त्रिभुज मखग से,

$$\frac{\text{मग}}{\text{मख}} = \text{स्प } ४५°$$

अथवा $\frac{\text{उ}}{\text{मख}} = १$

$$\therefore \text{ मख} = \text{उ}$$

त्रिभुज मकख में $\angle$ मकख = ९०°

$$\text{कख}^२ + \text{मक}^२ = \text{मख}^२$$

$$\text{अथवा } (२७०)^२ + \frac{\text{उ}^२}{३} = \text{उ}^२$$

$$\therefore \frac{२}{३} उ^२ = (२७०)^२$$

$$\therefore \quad उ = २७० \sqrt{\frac{३}{२}}$$

$$= १३५ \sqrt{६} \text{ पाद}$$

## प्रश्नावलि २५

(१) क्षैतिज समतल पर स्थित किसी ताड़ के वृक्ष के पाद से ३७ पाद दूर किसी बिन्दु पर वृक्ष के शीर्ष का उन्नति-कोण ६०° है, तो वृक्ष की ऊंचाई निकालो।

(२) एक दीप-स्तम्भ से ७ पाद दूरी पर खड़े हुए ५½ पाद ऊंचे मनुष्य की छाया की लंबाई १७ पाद है। तो स्तम्भ की ऊंचाई का निश्चय करो।

(३) ८० पाद ऊंचे एक स्तम्भ पर १६ पाद ऊंचा एक ध्वज है। भूमि पर स्तम्भ के आधार से ३२ पाद दूरी पर उस ध्वज के बांस द्वारा आपातित कोण निकालो।

(४) किसी बिन्दु पर एक पर्वत के शिखर का उन्नति-कोण १५° है। उस बिन्दु से पर्वत की ओर १ क्रोशक बढ़ने से नए बिन्दु पर शिखर का उन्नति-कोण ६०° है। तो पर्वत की ऊंचाई निकालो।

(५) किसी स्तम्भ के आधार पर ६० पाद ऊंचे एक दूसरे स्तम्भ का उन्नति-कोण २०° और प्रथम स्तम्भ के

शिखर पर उस दूसरे स्तम्भ के शिखर का अवनति-कोण ४५° है। तो प्रथम स्तम्भ की ऊंचाई निकालो।

(६) किसी पर्वत के पाद पर पर्वत के शिखर का उन्नति-कोण ४५° है। पर्वत आरम्भ में भूमि से ३०° का कोण बनाता है। भूमि से पर्वत पर १ क्रोशक आगे बढ़ने से नए बिन्दु पर शिखर का उन्नति-कोण ६०° हो जाता है, तो पर्वत की ऊंचाई निकालो।

[नागपुर १९४४

(७) एक समत्रिभुजाकार क्षेत्र के केन्द्र पर क पाद ऊंचा एक स्तम्भ है। यदि त्रिभुज की प्रत्येक भुजा से स्तम्भ के शिखर पर आपातित कोण २अ के सम हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \frac{३\sqrt{३}\,क^{२}\,ज्या^{२}\,अ}{३ - ४\,ज्या^{२}अ} \text{ वर्ग पाद।}$$

[नागपुर १९५०

(८) किसी झील से २०० पाद ऊंचे एक बिन्दु पर एक वायुयान का उन्नति-कोण ४५° है और वायुयान के प्रतिबिंब का अवनति-कोण ७०° है। तो झील के तल से वायुयान की ऊंचाई निकालो।

[बनारस,१९४२

(९) किसी नदी के तट पर स्थित २०० पाद ऊंचे एक स्तम्भ पर ३० पाद ऊंची एक मूर्ति है। यह मूर्ति,

स्तम्भ के सम्मुख नदी के दूसरे तट पर स्थित एक विन्दु पर उसी कोण का आपातन करती है जिसका आपातन स्तम्भ के स्थान पर खड़ा हुआ ६ पाद ऊंचा एक मनुष्य ठीक उसी विन्दु पर करता है। तो नदी के विस्तार (breadth) का निश्चय करो।

[वनारस १९४१

(१०) किसी स्तम्भ की पूर्व दिशा में स्थित एक विन्दु क पर स्तम्भ के शिखर का उन्नति-कोण अ है और क से उत्तर दिशा किसी विन्दु ख पर उसका उन्नति-कोण आ है। तो दिखाओ कि स्तम्भ की ऊंचाई

$$\frac{\text{कख. ज्या अ. ज्या आ}}{\sqrt{\text{ज्या (अ+आ) ज्या (अ−आ)}}}$$ है।

[वनारस १९४०

(११) किसी गिरजाघर के दक्षिण के एक विन्दु पर गिरजाघर के शीर्ष का उन्नति-कोण ४५° है, और उस विन्दु की पश्चिम दिशा में एक दूसरे विन्दु पर उसका उन्नति-कोण ३०° है। यदि इन दो विन्दुओं के बीच की दूरी य हो, तो गिरजाघर की ऊंचाई निकालो।

[पटना १९४४

(१२) किसी झील के तल से च ऊंचाई पर स्थित विन्दु पर के एक बादल का उन्नति-कोण अ और उसके प्रतिविम्ब

का अवनति-कोण आ है। तो दिखाओ कि झील के तल से बादल की ऊंचाई $\frac{\text{च ज्या (अ + आ)}}{\text{ज्या (आ − अ)}}$ है।

## सोलहवां अध्याय

# प्रतीप वर्तुल त्रित

(inverse circular function)

१६·१ समीकार ज्या $अ = \frac{१}{२}$ का समाधान, ३०°, १२०°, .... इत्यादि, कोण श्रेणी करती है। धन अथवा ऋण, लघुतम कोण, जिसकी ज्या $\frac{१}{२}$ है प्रतीक (symbol) 'ज्या$^{-१}$ $\frac{१}{२}$' द्वारा दर्शाया जाता है।

इस प्रकार ज्या$^{-१}$ $\frac{१}{२} = ३०°$ लिख सकते हैं।

सामान्यतः यदि ज्या अ = क, तो ज्या$^{-१}$क, लघुतम संख्यात्मक कोण दर्शाता है, जिसकी ज्या क होती है। यह प्रतीक 'ज्या वियुत (minus) एक क' अथवा 'ज्या प्रतीप क' इस प्रकार पढ़ा जाता है। यह ध्यान में रखना चाहिए कि ज्या$^{-१}$क, एक कोण है और इसे (ज्या क)$^{-१}$ से भिन्न समझना चाहिए जो $\frac{१}{ज्या क}$ के सम है।

इसीप्रकार कोज्या$^{-1}$क, धन अथवा ऋण लघुतम कोण दर्शाता है, जिसकी कोज्या क है। इसी प्रकार स्प$^{-1}$क, कोस्प$^{-1}$क, व्युत्कोज्या$^{-1}$क और व्युज्ज्या$^{-1}$क की भी परिभाषाएं की जा सकती हैं।

ज्या$^{-1}$ क, कोज्या$^{-1}$क, स्प$^{-1}$क,...... राशियां 'प्रतीप वर्तुल थित' कहलाती हैं।

१६·२ यदि ज्या अ = क, तो ज्या$^{-1}$क = अ

(परिभाषा से)

∴ ज्या (ज्या$^{-1}$क) = ज्या अ = क

अर्थात्, किसी राशि की प्रतीप ज्या की ज्या लेने से पुनः वही राशि मिलती है।

इसी प्रकार

कोज्या (कोज्या$^{-1}$क) = क

स्प (स्प$^{-1}$क) = क ...... इत्यादि

१६·३ उदाहरण १— सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}^{-1}\frac{४}{५} + \text{कोज्या}^{-1}\frac{१२}{१३} = \text{स्प}^{-1}\frac{६३}{१६}$$

मान लो ज्या$^{-1}$ $\frac{४}{५}$ = अ

∴ ज्या अ = $\frac{४}{५}$

और स्प अ = $\frac{४}{३}$

आ. १६·१

आ. १६·२

मान लो कोज्या$^{-1}$ $\frac{१२}{१३}$ = आ

$\therefore$ कोज्या आ $= \frac{१२}{१३}$

और स्प आ $= \frac{५}{१२}$

मान लो स्प$^{-१}$ $\frac{६३}{१६} =$ इ

$\therefore$ स्प इ $= \frac{६३}{१६}$

तो अब यह सिद्ध करना है कि अ + आ = इ
अथवा, यह दिखलाना है कि
स्प (अ + आ) = स्प इ

अब, स्प (अ + आ) $= \frac{\text{स्प अ} + \text{स्प आ}}{१ - \text{स्प अ.स्प आ}}$

$$= \frac{\frac{४}{३} + \frac{५}{१२}}{१ - \frac{४}{३}.\frac{५}{१२}}$$

$$= \frac{४८ + १५}{३६ - २०} = \frac{६३}{१६}$$

= स्प इ

इसलिए संबंध सिद्ध होता है।

उदाहरण २— सिद्ध करो कि

$$२\ \text{स्प}^{-१}\frac{२}{५} + \text{स्प}^{-१}\frac{२१}{२०} = \frac{\text{प्या}}{२}$$

मान लो $स्प^{-1}\frac{२}{५} = अ$

$\therefore \quad स्प\, अ = \frac{२}{५}$

$$\therefore \quad स्प\left(\frac{प्या}{२} - २\, स्प^{-1}\frac{२}{५}\right) = स्प\left(\frac{प्या}{२} - २\, अ\right)$$

$$= कोस्प\, २\, अ$$

$$= \frac{१ - स्प^{२}\, अ}{२\, स्प\, अ}$$

$$= \frac{१ - \frac{४}{२५}}{२ \cdot \frac{२}{५}}$$

$$= \frac{२१}{२०}$$

$$\therefore \quad \frac{प्या}{२} - २\, स्प^{-1}\frac{२}{५} = स्प^{-1}\frac{२१}{२०}$$

अथवा $२\, स्प^{-1}\frac{२}{५} + स्प^{-1}\frac{२१}{२०} = \frac{प्या}{२}$

उदाहरण ३— सिद्ध करो कि

$$कोज्या^{-1}\, य - कोज्या^{-1}\, र$$

$$= कोज्या^{-1}\left\{यर + \sqrt{(१ - य^{२})(१ - र^{२})}\right\}$$

मान लो $कोज्या^{-1}\, य = अ$

$\therefore$ कोज्या अ = य,

ज्या अ = $\sqrt{१ - य^२}$

मान लो कोज्या$^{-१}$ र = आ

$\therefore$ कोज्या आ = र,

ज्या आ = $\sqrt{१ - र^२}$

तो कोज्या (अ − आ) = कोज्या अ. कोज्या आ

+ ज्या अ. ज्या आ

$= यर + \sqrt{(१ - य^२)(१ - र^२)}$

अथवा अ − आ = कोज्या$^{-१}$ $\left\{यर + \sqrt{(१ - य^२)(१ - र^२)}\right\}$

अ और आ की अर्हाओं का आदेश करने पर,
कोज्या$^{-१}$ य − कोज्या$^{-१}$ र

$= कोज्या^{-१} \left\{यर + \sqrt{(१ - य^२)(१ - र^२)}\right\}$

## प्रश्नावलि २६

सिद्ध करो कि

(१) ज्या$^{-१}$ $\frac{१}{\sqrt{५}}$ − स्प$^{-१}$ $\frac{१}{३}$ = कोस्प$^{-१}$ ७

(२) $ज्या^{-1}\frac{३}{५} - कोज्या^{-1}\frac{१२}{१३} = ज्या^{-1}\frac{१६}{६५}$

[बनारस १९४३

(३) $ज्या^{-1}\frac{४}{५} + ज्या^{-1}\frac{५}{१३} + ज्या^{-1}\frac{१६}{६५} = \frac{प्या}{२}$

[कलकत्ता १९४१

(४) $स्प^{-1}४ - स्प^{-1}\frac{१}{४} = स्प^{-1}\frac{१५}{८}$

(५) $४(कोस्प^{-1}३ + व्युज्ज्या^{-1}\sqrt{५}) = प्या$

[कलकत्ता १९३९

(६) $२स्प^{-1}\frac{१}{३} + स्प^{-1}\frac{१}{७} = \frac{प्या}{४}$ [बनारस १९४१

(७) $ज्या^{-1}(कोज्या\ य) + कोज्या^{-1}(ज्या\ य) = प्या - २य$

(८) $ज्या^{-1}\ य + कोज्या^{-1}\ य = \frac{प्या}{२}$

[बनारस १९४५

(९) $कोस्प^{-1}य - कोस्प^{-1}\ र = कोस्प^{-1}\left(\frac{यर+१}{र-य}\right)$

(१०) $ज्या^{-1}\ य + ज्या^{-1}र$

$$= ज्या^{-1}\left\{य\sqrt{१-र^{२}} + र\sqrt{१-य^{२}}\right\}$$

(११) $२ \text{स्प}^{-1} य = \text{ज्या}^{-1} \frac{२ य}{१ + य^2}$

(१२) $\text{स्प}^{-1} \sqrt{य} = \frac{१}{२} \text{कोज्या}^{-1} \left(\frac{१ - य}{१ + य}\right)$ [कलकत्ता १९४३

(१३) $\text{ज्या} \left\{\text{कोस्प}^{-1} \left[\text{कोज्या} \left(\text{स्प}^{-1} य\right)\right]\right\} = \sqrt{\frac{य^2 + १}{य^2 + २}}$

[बनारस १९४५

(१४) यदि $\text{स्प}^{-1} य + \text{स्प}^{-1} र = \frac{\text{प्या}}{२}$, तो दिखाओ कि

$$य . र = १$$

(१५) (१) $\text{ज्या} \left( \text{ज्या}^{-1} \frac{\sqrt{३}}{२} + \text{कोज्या}^{-1} \frac{\sqrt{३}}{२}\right)$

(२) $\text{कोज्या} \left(\text{कोज्या}^{-1} क + \text{व्युत्कोज्या}^{-1} \frac{१}{क}\right)$

की अर्हाएँ निकालो।

(१६) य की कौन सी अर्हा,
समीकार $\text{स्प}^{-1} २ य + \text{स्प}^{-1} ३ य = ४५^\circ$ का समाधान करेगी? अपने उत्तर का कारण दो।

[बनारस १९४२

# उत्तरमाला

१. (१) ८५ अ ९६'५०"　　(२) १६ अं २७'५०"

२. (१) ७१° २९'३४"·२०८　(२) ७८° २५'१९"·०२

## प्रश्नावलि १

(१) ११ पाद

(२) ११९·०४७२४ शतिमान

(३) १० और ३५

(४) ७२°, ९०°, १०८°, १२६°, १४४°,

$\frac{\text{२प्या}}{\text{५}}, \frac{\text{प्या}}{\text{२}}, \frac{\text{३प्या}}{\text{५}}, \frac{\text{७प्या}}{\text{१०}}, \frac{\text{४प्या}}{\text{५}}$

(५) (क) १०५°, $\text{११६}\frac{\text{२अ}}{\text{३}}, \frac{\text{७प्या}}{\text{१२}}$

(ख) १००°, $\text{१११}\frac{\text{१अं}}{\text{९}}, \frac{\text{५प्या}}{\text{९}}$

(ग) $२२\frac{१}{२}^\circ$, $२५^{अ}$, $\frac{प्या}{८}$

(६) ८५९·४३७ पाद

## प्रश्नावलि २

(२१) $\frac{ज्या^२ अ}{१ + ज्या अ}$ (२२) $\frac{१ + व्युत्कोज्या^२ अ}{व्युत्कोज्या अ}$

## प्रश्नावलि ३

(१) यदि ज्या अ = य, तो कोज्या अ $= \sqrt{१ - य^२}$,

$$स्प अ = \frac{य}{\sqrt{१ - य^२}}, \quad व्युज्ज्या अ = \frac{१}{य},$$

$$व्युत्कोज्या अ = \frac{१}{\sqrt{१ - य^२}}$$

$$और \; कोस्प अ = \frac{\sqrt{१ - य^२}}{य}$$

(२) यदि स्प अ = य, तो

$$ज्या अ = \frac{य}{\sqrt{१ + य^२}}, \quad कोज्या अ = \frac{१}{\sqrt{१ + य^२}},$$

$$\text{व्युज्ज्या अ} = \frac{\sqrt{१ + \text{य}^२}}{\text{य}},$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \sqrt{१ + \text{य}^२}, \quad \text{कोस्प अ} = \frac{१}{\text{य}}$$

(३) यदि व्युत्कोज्या अ = य, तो

$$\text{ज्या अ} = \frac{\sqrt{\text{य}^२ - १}}{\text{य}}, \quad \text{कोज्या अ} = \frac{१}{\text{य}},$$

$$\text{स्प अ} = \sqrt{\text{य}^२ - १}, \quad \text{व्युज्ज्या अ} = \frac{\text{य}}{\sqrt{\text{य}^२ - १}},$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{१}{\sqrt{\text{य}^२ - १}}$$

(४) $$\text{ज्या अ} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२ \text{ अ}}},$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{कोस्प अ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२ \text{ अ}}}$$

(५) $$\text{कोज्या अ} = \frac{\sqrt{\text{व्युज्ज्या}^२ \text{ अ} - १}}{\text{व्युज्ज्या अ}},$$

$$\text{कोस्प अ} = \sqrt{\text{व्युज्ज्या}^२ \text{ अ} - १}$$

(६) यदि $$\text{ज्या अ} = \frac{\text{क्ष}(\text{क्ष} + २\text{य})}{\text{क्ष}^२ + २\text{क्ष}\text{य} + २\text{य}^२},$$

$$\text{कोज्या } अ = \frac{२य\ (क्ष+य)}{क्ष^२ + २क्षय + २य^२}$$

$$\text{स्प } अ = \frac{क्ष\ (क्ष+२\ य)}{२\ य\ (क्ष+य)},$$

$$\text{व्युज्ज्या } अ = \frac{क्ष^२ + २\ क्ष\ य + २\ य^२}{क्ष\ (क्ष+२\ य)},$$

$$\text{व्युत्कोज्या } अ = \frac{क्ष^२ + २\ क्ष\ य + २\ य^२}{२\ क्ष\ (क्ष+य)},$$

$$\text{कोस्प } अ = \frac{२\ य\ (क्ष+य)}{क्ष\ (क्ष+२\ य)}$$

(७) $\pm \left(\frac{य+र}{य-र}\right)$

(८) $\frac{१५}{१७}$

## प्रश्नावलि ५

## प्रश्नावलि ६

(१) (क) ३०°, १५०° (का) ४५°, ३१५° (कि) १५०°, ३३०°
(३) १

## प्रश्नावलि ७

(१) $स\ प्या + (-१)^{स} \frac{प्या}{३}$ (२) $२\ स\ प्या \pm \frac{प्या}{२}$

(३) $स\ प्या + \frac{३\ प्या}{४}$ (४) $स\ प्या \pm \frac{प्या}{६}$

(५) $स\ प्या \pm \frac{प्या}{४}$ (६) $स\ प्या \pm \frac{प्या}{६}$

(९) $२\ स\ प्या + \frac{प्या}{४}$ (१०) $\frac{प्या}{म - न}$

## प्रश्नावलि ८

(१) $२\ स\ प्या \pm \frac{प्या}{४}$ अथवा $२\ स\ प्या \pm \frac{२\ प्या}{३}$

(२) $स\ प्या + \frac{प्या}{४}$ अथवा $स\ प्या + इ$, जहां कोस्प $इ = \frac{१}{२}$

(३) $२\ स\ प्या \pm इ$ अथवा $२\ स\ प्या \pm ई$, जहां कोज्या $इ = \frac{२}{३}$
कोज्या $ई = -\frac{१}{३}$ समीकारों को सिद्ध करनेवाली इ और ई की अल्पिष्ठ धन अर्हाएं हैं।

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{२य (क्ष + य)}}{\text{क्ष}^{२} + \text{२क्षय} + \text{२य}^{२}}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{क्ष (क्ष + २ य)}}{\text{२ य (क्ष + य)}},$$

$$\text{व्युज्या अ} = \frac{\text{क्ष}^{२} + \text{२ क्ष य} + \text{२ य}^{२}}{\text{क्ष (क्ष + २ य)}},$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{\text{क्ष}^{२} + \text{२ क्ष य} + \text{२ य}^{२}}{\text{२ क्ष (क्ष + य)}},$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\text{२ य (क्ष + य)}}{\text{क्ष (क्ष + २ य)}}$$

(७) $\pm \left(\frac{\text{य} + \text{r}}{\text{य} - \text{r}}\right)$

(८) $\frac{\text{१५}}{\text{१७}}$

## प्रश्नावलि ५

(१) ·९९९९६२ (२) ·००५८१७७

(३) २०६२६·४८८ (४) १·००००००४२३१

(५) ·०१७४५३२ (६) ३४'२३"

(७) ६'५२"·५३ (९) ३'५५"·३६

(१०) ५·१२ यष्टि, लगभग

## प्रश्नावलि ६

(१) (क) ३०°, १५०° (का) ४५°, ३१५° (कि) १५०°, ३३०°
(३) १

## प्रश्नावलि ७

(१) $स\ प्या + (-१)^{स} \frac{प्या}{३}$ (२) $२\ स\ प्या \pm \frac{प्या}{२}$

(३) $स\ प्या + \frac{३\ प्या}{४}$ (४) $स\ प्या \pm \frac{प्या}{६}$

(५) $स\ प्या \pm \frac{प्या}{४}$ (६) $स\ प्या \pm \frac{प्या}{६}$

(९) $२\ स\ प्या + \frac{प्या}{४}$ (१०) $\frac{प्या}{म - न}$

## प्रश्नावलि ८

(१) $२\ स\ प्या \pm \frac{प्या}{४}$ अथवा $२\ स\ प्या \pm \frac{२\ प्या}{३}$

(२) $स\ प्या + \frac{प्या}{४}$ अथवा स प्या + इ, जहां कोस्प $इ = \frac{१}{२}$

(३) २ स प्या ± इ अथवा २ स प्या ± ई, जहां कोज्या $इ = \frac{२}{३}$ कोज्या $ई = -\frac{१}{३}$ समीकारों को सिद्ध करनेवाली इ और ई की अल्पिष्ठ धन अर्हाएं हैं।

(४) $२ स \text{ प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{२}$ अथवा $स \text{ प्या} + \frac{\text{प्या}}{३}$

(५) $\frac{स \text{ प्या}}{२}$ अथवा $\frac{(२ स + १) \text{ प्या}}{१०}$

(६) $\frac{(४ स + १) \text{ प्या}}{१२}$ अथवा $\frac{(४ स - १) \text{ प्या}}{८}$

(७) $\frac{स \text{ प्या}}{२} \pm \sqrt{१ + \frac{स^२ \text{ प्या}^२}{४}}$

(८) न और म कोई पूर्णांक हों, तो

$इ = (न + म + १) \frac{\text{प्या}}{२}$ और $ई = (न - म) \frac{\text{प्या}}{२} + \frac{\text{प्या}}{३}$

(९) न और म कोई पूर्णांक हों, तो

$$य = \frac{१}{१६} \left[ (१० म - ६ न) \text{प्या} \mp \frac{३ \text{ प्या}}{४} \pm \frac{५ \text{ प्या}}{३} \right]$$

$$र = \frac{१}{१६} \left[ (१० न - ६ म) \text{ प्या} \mp \text{प्या} \pm \frac{५ \text{ प्या}}{४} \right]$$

(१०) $\text{ज्या } अ = \frac{ख ग \pm क \sqrt{क^२ + ख^२ - ग^२}}{क^२ + ख^२}$

## प्रश्नावलि ९

(१) $\frac{५६}{६५}, \frac{६३}{६५}, -\frac{१६}{६३}$

(३) $\frac{\text{प्या}}{८}$

## प्रश्नावलि १०

(१) $५+२\sqrt{६}$

## प्रश्नावलि ११

(१) $\frac{४ स्प क - ४ स्प^{३} क}{१ - ६ स्प^{२} क + स्प^{४} क}$

## प्रश्नावलि १२

(१) $\frac{७\sqrt{१३०}}{१३०}$ (२) $\frac{न}{म}$

(३) (१) $\sqrt{२}+१$

## प्रश्नावलि १४

(१) २ स प्या अथवा २ स प्या $+ \frac{प्या}{२}$

(२) स. ३६०° + ९६°५२′ अथवा स. ३६०° − २३°८′

(३) स प्यां $+ (-१)^{स} \frac{प्या}{६}$

(४) २ स प्या अथवा २ स प्या $+ \frac{प्या}{४}$

(४) $२\text{ स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{२}$ अथवा $\text{स प्या} + \frac{\text{प्या}}{३}$

(५) $\frac{\text{स प्या}}{२}$ अथवा $\frac{(२\text{ म}+१)\text{ प्या}}{१०}$

(६) $\frac{(४\text{ स}+१)\text{ प्या}}{१२}$ अथवा $\frac{(४\text{ स}-१)\text{ प्या}}{८}$

(७) $\frac{\text{स प्या}}{२} \pm \sqrt{१+\frac{\text{स}^२\text{ प्या}^२}{४}}$

(८) न और म कोई पूर्णांक हों, तो

$$\text{इ} = (\text{न}+\text{म}+१)\frac{\text{प्या}}{२} \text{ और } \text{ई} = (\text{न}-\text{म})\frac{\text{प्या}}{२}$$

(९) न और म कोई पूर्णांक हों, तो

$$\text{य} = \frac{१}{१६}\left[(१०\text{ म}-६\text{ न})\text{ प्या} \mp \frac{३\text{ प्या}}{४} \pm \frac{५८}{३}\right.$$

$$\text{र} = \frac{१}{१६}\left[(१०\text{ न}-६\text{ म})\text{ प्या} \mp \text{प्या} \pm \frac{५}{}\right.$$

(१०) $\text{ज्या अ} = \frac{\text{ख ग} \pm \text{क}\sqrt{\text{क}^२+\text{ख}^२-\text{ग}^२}}{\text{क}^२+\text{ख}^२}$

## प्रश्नावलि ९

(१) $\frac{५६}{६५}, \frac{६३}{६५}, -\frac{१६}{६३}$

(२) $\frac{\text{प्या}}{८}$

(१८) स प्या अथवा $\frac{\text{स प्या}}{४} + (-१)^{\text{स}} \frac{\text{प्या}}{२४}$

## प्रश्नावलि १६

(१) $\text{आ} = २\frac{१}{२}, \text{अ} = १, \text{अ}_१ = २, \text{अ}_२ = ३, \text{अ}_३ = ६$

## प्रश्नावलि १७

(२) २३ पाद; $२४\sqrt{३}$ वर्ग पाद

उदाहरण (पृष्ठ २६६)

(१) $\bar{२}$·२९४३ (२) ३·८२३९ (३) १·४०६३

उदाहरण (पृष्ठ २६७)

(१) ·१५०१ (२) ७·०८१ (३) २५१२

## प्रश्नावलि १८

(१) (क) ·१२३९ (ख) २·३८०४ (ग) ·४२५७८ (घ) $\bar{१}$·१८५८६

(२) $\bar{२}$; ०; $\bar{५}$; ०; २

(३) ·०१४०२; २·१८२

(४) (क) ३·३४७ (ख) ११·२३

(५) (क) $\frac{२८२१}{१०^{२३}}$; $\frac{५४७६}{१०^{४१}}$; $२९३२ \times १०^{२११}$

(ख) १·४१७; १२०·३; ·०४९६१

(५) $२\text{स}\,\text{प्या} + \frac{२\text{प्या}}{३}$ अथवा $२\,\text{स}\,\text{प्या}$

(७) $\left(\text{स} + \frac{१}{२}\right)\frac{\text{प्या}}{३}$ अथवा $\text{स}\,\text{प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{३}$

(८) $\frac{\text{स}\,\text{प्या}}{२}$ अथवा $\text{स}\,\text{प्या} + (-१)^{\text{स}-१}\,\frac{\text{प्या}}{६}$

(९) $\text{स}\,\text{प्या} + \frac{\text{प्या}}{२}$ अथवा $\text{स}\,\text{प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{३}$

(१०) $\text{स}\,\text{प्या} + \frac{\text{प्या}}{४}$ अथवा $\text{स}\,\text{प्या} + \text{इ}$, जहां $\text{स्प}\,\text{इ} = \frac{१}{२}$

(११) $\frac{\text{स}\,\text{प्या}}{२} + (-१)^{\text{स}}\,\frac{\text{प्या}}{१२}$

(१२) $\text{स}\,\text{प्या}$ अथवा $\left(\text{स} - \frac{१}{४}\right)\frac{\text{प्या}}{२}$

(१३) $२\,\text{स}\,\text{प्या} + \frac{\text{प्या}}{२}$ अथवा $\frac{१}{५}\left(२\,\text{स}\,\text{प्या} - \frac{\text{प्या}}{२}\right)$

(१४) $\frac{\text{स}\,\text{प्या}}{३}$ अथवा $\frac{\text{स}\,\text{प्या}}{२}$

(१५) $(२\,\text{स} + १)\,\frac{\text{प्या}}{४}$ अथवा $२\,\text{स}\,\text{प्या} \pm \frac{२\,\text{प्या}}{३}$

(१६) $\frac{\text{स}\,\text{प्या}}{३}$ अथवा $\text{स}\,\text{प्या} \pm \text{इ}$, जहां $\text{स्प}\,\text{इ} = \frac{१}{\sqrt{२}}$

(१७) $\text{स}\,\text{प्या} + \frac{\text{प्या}}{४}$ अथवा $२\,\text{स}\,\text{प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{३}$

(१८) स $\text{प्या}$ अथवा $\frac{\text{स प्या}}{४} + (-१)^{\text{स}} \frac{\text{प्या}}{२५}$

## प्रश्नावलि १६

(१) $\text{आ} = २\frac{१}{२}, \text{अ} = १, \text{अ}_{१} = २, \text{अ}_{२} = ३, \text{अ}_{३} = ६$

## प्रश्नावलि १७

(२) २३ पाद; $२४\sqrt{३}$ वर्ग पाद

उदाहरण (पृष्ठ २६६)

(१) $\bar{२}$·२९५३ (२) ३·८२३९ (३) १·७०६३

उदाहरण (पृष्ठ २६७)

(१) ·१५०१ (२) ७·०८१ (३) २५१२

## प्रश्नावलि १८

(१) (क) ·१२३९ (ख) २·३८०४ (ग) ·४२५७८ (घ) $\bar{१}$·१८५८६

(२) $\bar{२}$; ०; $\bar{५}$; ०; २

(३) ·०१५०२; २·१८२

(४) (क) ३·३४७ (ख) ११·८३

(५) (क) $\frac{२८२१}{१०^{१३}}$; $\frac{५४७६}{१०^{११}}$; $२९३२ \times १०^{२११}$

(ख) १·४१६७; १२०·३; ·०४९६१

(७) (क) ९०·१८ (ख) ·३७७१ (ग) २·३०२

(८) ·२५९०; १·७२१४५, २·१४२०

(९) $\frac{\text{ख}}{\text{२}}$ और $-\frac{\text{ख}}{\text{३}}$

(१०) (क) $\frac{\text{१}}{\text{७}}$ (ख) $\frac{\text{१}}{\text{४}}$ (ग) २

(११) (अ) (१) २२ (२) २१
(आ) (१) ९ वां (२) ७ वां

(१२) (१) १; $\frac{\text{छे २}}{\text{छे ७}}$ अर्थात् ·३५६ ......

(२) $\frac{\text{२ (छे ७ − छे ३)}}{\text{(६ छे २ − छे ३ − छे ७)}}$ अर्थात २·२४९२......

(३) $\text{य} = \frac{\text{२ ख}^{\text{२}} + \text{खग} + \text{कग} - \text{कख} - \text{क}^{\text{२}}}{\text{क (ख + ग − क)}}$,

$\text{र} = \frac{\text{ख − क}}{\text{ख + ग − क}}$

जहां क = छे२, ख = छे३, ग = छे७

(१३) $\bar{\text{१}}$·२९४७२$\dot{\text{६}}$

(१४) १·२३९६$\dot{\text{३}}$

## प्रश्नावलि १९

(१) क = ७०°३१′३०″, ख = १९°२८′३०″, गा = ९ √२
(२) का = ४०(√६ − √२), गा = ४०(२ − √३)

(३) क=६०°, ख=३०°, का=(४·३)√३

(४) कख=६√३ पाद; कग=८·०८२ पाद;
कच=३√३ पाद; गच=६·१९२ पाद

## प्रश्नावलि २०

(२) २५°२१'

(३) २८°५७'; ४६°२३'; १०३°२९'

(५) क=४८°११'२०", ख=५८°२४'४०", ग=७३°२४'

(६) क=१०५°, ख=१५°, ग=६०°

(७) क=४५°, ख=७५°, ग=६०°

(८) क=३७°२२'१२", ख=५३°३१', ग=८८°५२'४८"

## प्रश्नावलि २१

(१) क=८३°३९'३०", ख=४२°२०'२०", गा=१९६·?

(२) क=१०८°२६'१२", ख=१८°२६'

(३) ग=११७°३८'४५", क=२७°३८'४५"

(४) क=४९°३४'२५", ख=३६°४३'१५"

(५) ख=९०°, ग=३०°, का:खा=√३:२

(६) क=१२४°४८'४०", ख=३३°११'२०"

(७) ख=७८°४९', ग=५६°४१'

(८) ख=१०८°३६'२०", ग=३१°२३'३०"

(९) ख=९४°४२'४०", ग=२५°१७'२०"

(१०) ख=७५°, ग=३०°, का=√६

## प्रश्नावलि २२

(१) खा = २·३५३५, गा = ३·१६०५

(२) ग = ३५°२०′, खा = ३६४·२, गा = २१३ ५

(३) १७२·६

(४) ग = ७०°३०′, खा = १८·३६, गा = ३७·१६

(५) १३·३६

## प्रश्नावलि २३

(१) (१) एक त्रिभुज संभव है।
ग = ३५°२५′, क = २१°२९′, का = १३·१८

(२) दो त्रिभुज संभव हैं।
ग$_1$ = ४९°५९′, क$_1$ = ९९°१९′, का$_1$ = ४२·५२;
ग$_2$ = १३०°१′, क$_2$ = १९°१७′, का$_2$ = १४·२३

(३) एक भी त्रिभुज संभव नहीं।

(४) एक लंबकोण त्रिभुज संभव है।
ग = ९०°, क = ४५°, का = ४√२

(२) फ$_1$ = ६३°५५′, स$_1$ = ६७°२८′, सा$_1$ = ५८·१५;
फ$_2$ = ११६°५′, स$_2$ = १५°१८′, सा$_2$ = १६ ६२

(३) दूसरी दशा संदिग्ध है।
ग$_1$ = ३८°४१′, स$_1$ = १११°१९′, सा$_1$ = ३७२·६ पाद
ग$_2$ = १४१°१९′, स$_2$ = ८°३१′, सा$_2$ = ६०·२९ पाद

(४) ३९°३५′, २८°२१′

(५) $\text{ग}_1 = ३०^\circ$, $\text{ख}_1 = १०५^\circ$, $\text{गा}_1 = \sqrt{२}$;
$\text{ग}_2 = ६०^\circ$, $\text{ख}_2 = ७५^\circ$, $\text{गा}_1 = \sqrt{६}$

(६) ख = २६°१६′४०″, ग = ११९°४३′२०″, गा = ५५९·०६

## प्रश्नावलि २४

(३) $३ : २\sqrt{३} + \sqrt{५} : ४$

(४) ४०°५३′३०″, ६०°, ७९°६′३०″; $८\sqrt{७}$

(५) ७५°१२′, ८२°२४′, २२°२४′

(६) १२०°

(७) क = ३०°५४′, ख = ४९°६′,
का = ५, खा = ४, गा = $\sqrt{२१}$

(८) क = २०°५५′१२″, ख = २८°३०′४८″,
खा = ४०·००६ पाद, गा = ६५·९९४ पाद

(९) क = ४२°३०′४०″, खा = १०८ पाद

(१०) का = ३८·०५, खा = २९·३९, गा = ४१·६२

## प्रश्नावलि २५

(१) $२७\sqrt{२}$ पाद (२) $७\frac{१३}{१७}$ पाद

(३) इ, जहां स्प इ = $\frac{१}{१७}$ (४) १६७३·७६ पाद

(५) २२४·९ पाद (६) $\frac{१}{\sqrt{३} - १}$ कोशाक

(८) $२००\sqrt{३}$ पाद (९) १०७·२ पाद

(११) $\frac{य}{\sqrt{२}}$ —

## प्रश्नावलि २८

(१५) (१) १ (२) $२क^{२}-१$

(१६) $\frac{१}{६}$

# पारिभाषिक शब्दावलि

## आंगल-हिन्दी

acute angle न्यून कोण, निकोण
according as तदनुसार
addition योग
addition theorem योगप्रमेय
adjacent संलग्न
admissible ग्राह्य
algebra बीजगणित
algebraically बीजीय रीति से
aliter (otherwise) अन्यथा
alternative वैकल्पिक
altitude उच्छ्राय
ambiguity संदिग्धता
ambiguous case संदिग्ध दशा
angle of depression अवनति-कोण
angle of elevation उन्नति-कोण
angular points कोणबिन्दु
anticlockwise प्रतिघटीवत्
antilogarithm प्रतिच्छेदा
approximate लगभग, स्थूल रूप से, उपसादित, उपसन्न (brought near)
arc चाप
area क्षेत्रफल
arithmetic progression समांतर श्रेढी
article अनुच्छेद
at rest गतिहीन, विश्रामस्थ
bar शिरोदंड
bisector अर्धक
bounded सीमित
bounding arc मर्यादा-चाप
bounding line मर्यादा-रेखा
calculation गणन
case दशा
centesimal शतिक
centimeter शतिमान
centre केन्द्र
characteristic लक्षण
circle वृत्त
circular वर्तुल
circular measure वर्तुल माप
circumcentre परिकेन्द्र
circumcircle परिवृत्त

circumradius परित्रिज्या
circumscribe परिलेखन
clockwise घटीवत्
coincide (Lat *co* सम् + *incidere*— to fall upon पतन) सपतन्
coincidence सपतन्, सपात
coincident सपाती
common साधारण
common to both उभय साधारण
common difference प्रचय
common system of logarithms सामान्य छेदा पद्धति, दशच्छेदा पद्धति (base is 10)
complementary angle लम्ब पूर कोण
concyclic संवृत्तीय
condition प्रतिबध
congruent सर्वांगसम
constant अचल, स्थिराङ्क
continuous सतत
conversely विलोम क्रमेण, विलोमत
convert परिवर्तन
corresponding सवादी
corollary 1 (to a theorem) उपप्रमेय
2 (to a problem) उपनिर्मेय
3 (to a proposition) उपसाध्य
cosecant (cosec) व्युत्क्रमज्या (व्युज्या)
cosine (cos) कोटिज्या (कोज्या)
cotangent (cot) कोटिस्पर्शज्या, कोटिस्पज्या (कोस्प)
coversed sine उत्क्रमकोटिज्या (उत्को)
curve वक्र
cyclic वृत्तीय, चक्रिक
data न्यास, पक्ष
decagon दशकोण, दशभुज
decimal दशमिक
definition परिभाषा
degree अश
denominator हर
diagonal विकर्ण
diameter व्यास
disc बिम्ब
division भाजन
element अवयव
equation समीकार
equilateral समभुजीय
equilateral triangle समत्रिभुज
escribe बहिर्लेखन
escribed बहिर्लिखित
even युग्म
exact यथार्थ
excentre बहिष्केन्द्र
excircle बहिर्वृत्त
expansion विस्तार

express व्यक्त करना
expression पदसंहति, व्यंजक
exradius बहिस्त्रिज्या
exterior angle बहिष्कोण
external bisector बाह्य अर्धक
externally बाह्यतः
final अंतिम
finite परिमित
fixed स्थिर
foot पाद
formula सूत्र
fraction भिन्न
function फलन
fundamental मूलभूत
general सामान्य
geometrical progression गुणोत्तर श्रेढी
geometry रैखिकी
grade ग्रेड
graph बिंदुरेख
harmonic mean हरात्मक मध्यक
hexagon षट्कोण, षड्भुज
horizontal क्षैतिज
hypotenuse कर्ण
identical ऐकात्म, सर्वांगसम
identity ऐकात्म्य
illustrative निदर्शनात्मक
imaginary काल्पनिक
incentre अंतः केन्द्र
incircle अंतर्वृत्त
inclination नति
included अंतर्गत
index of the power घातांक
inequality असमता
infinite अनन्त
infinite series अनन्त श्रेढी
infinitesimal अत्यणु
infinity अनन्ती
initial आदि, आदिम
initial line आदि रेखा
initial position आरम्भ स्थिति
inradius अंतस्त्रिज्या
inscribe अंतर्लेखन
integer पूर्णांक
integral अनुकल
internal angle अंतः कोण
internal bisector अन्तरार्धक
internally अन्तरतः
intersect मिथश्छेदन, छेदन
inverse प्रतीप
involved अंतर्भूत
isosceles triangle द्विसमत्रिभुज
latitude अक्षवृत्त
law नियम
left hand side वाम पक्ष
length लम्बाई, आयाम
level समतल
limit सीमा
logarithm छेदा
magnitude महत्ता

mantissa (the decimal part of common logarithms) दशमिकांश
mean मध्यक
measure माप
measurement of angles कोण मापन
median मध्यगा
meridian ध्रुववृत्त
mile क्रोशांक
minus वियुत
minute कला
most general सामान्यतम
multiple अपवर्त्य
natural प्राकृत
negative ऋण
notation संकेतना
numerator अंश
numerical संख्यात्मक
object वस्तु
obtuse angle अधिककोण
octagon अष्टकोण, अष्टभुज
odd अयुग्म
opposite विरुद्ध, विपरीत, सम्मुख
origin मूलबिंदु
orthocentre लम्बकेन्द्र
otherwise अन्यथा
parallel समान्तर
partly अंशतः
pedal triangle पदिक त्रिभुज
pentagon पंचकोण, पंचभुज
perimeter परिमाप
period आवर्तकाल
periodic आवर्तीय
perpendicular लम्ब
plane समतल
point of contact संस्पर्श बिन्दु
polygon बहुभुज
position स्थिति
positive धन
power घात
principle प्रतिज्ञा
problem निर्मेय
product गुणनफल
progression श्रेढ़ी
properties गुण
proportional अनुपाती
quadrant चरण
quadratic equation वर्ग-समीकार, द्विघात-समीकार
quadrilateral चतुर्भुज
quantity राशि
quotient भागफल
radian 1 *n* आर (from radius अर), संचापारकोण *m* (स equal + चाप arc + अर radius—an angle subtended by an arc equal in length to the radius) 2 *adj* आरीय
radius vector सदिश त्रिज्या

raise उन्नयन, उच्चयन
raised उन्नत
  6 raised to 5 ६ उन्नत ५
  6 raised to the power 5 ६ घात ५
ratio निष्पत्ति
real वास्तविक
reciprocal व्युत्क्रम
rectangle आयत
regular नियमित
relation संबंध
represent निरूपण
restriction निरंध
result फल
revolution परिभ्रमण
revolving line परिभ्रमण रेखा
right angle समकोण
right-hand side दक्षिण पक्ष
root मूल
rule नियम
satisfy 1 (an equation) (स्वीकार) समाधान करना
  2 (a condition) (प्रतिबंध) पालन करना
secant (sec) व्युत्क्रमकोटिज्या (व्युत्कोज्या)
second काष्ठिका
section छेद
section of a sphere गोलीय-छेद
sector शकल
sector of a circle वृत्त-शकल
segment खण्ड
semiperimeter सामिपरिमाप
series श्रेढी
sexagesimal षाष्ठिक
sextant षष्ठक
side 1 (of a solid) पार्श्व
  2 (of an equation) पक्ष
  3 (of a triangle) भुजा
similar समरूप
simplify सरल करना
sine (sin) ज्या
size परिमाण
solution (result) फल
solution of a triangle त्रिभुज-निर्धारण
sphere गोल
square 1 (power) वर्ग
  2 (figure) समायत
square root वर्गमूल
squaring द्विघातन
squaring and adding वर्ग-योग करना
standard प्रमाप
submultiple अपवर्तक
substitution आदेश
subtend आपातन
subtraction वियोग
suffix पादांक

sum योग
supplementary angle  अनुपूर कोण
symbol प्रतीक
system पद्धति
table सारणी
tangent (tan) स्पर्शज्या, स्पज्या (स्प)
tangent (line) स्पर्शी, स्पर्शरेखा
tendency प्रवृत्ति
theodolite त्रिकोणमान
theorem प्रमेय
theory सिद्धान्त
throughout सार्वत
trace अनुरेखण
traced out अनुरेखित
trigonometry त्रिकोणमिति
trigonometrical त्रिकोणमितीय
uniform 1 एकरूप
2 (homogeneous) समांग
unit एकक
unknown अज्ञात
verify सत्यापन
versed sine उत्क्रमज्या (उज्या)
vertical उदग्र

## Symbols

$\pi$ प्या
Lt. (limit) सी (सीमा)
log (logarithm) छे (छेदा)
' (dash) '(प्रास)

# पारिभाषिक शब्दावलि

## हिन्दी–आंगल

अंश numerator
अंश degree
अंशक grade
अंशतः partly
अक्षवृत्त latitude
अचल constant
अज्ञात unknown
अत्यणु infinitesimal
अधिककोण obtuse angle
अनन्त infinite
अनन्त श्रेढी infinite series
अनन्ती infinity
अनियत indefinitely
अनुकल integral
अनुच्छेद article
अनुपाती proportional
अनुरेखण trace
अनुरेखित traced out
अंत केंद्र incentre
अंत कोण internal angle
अंतर्गत included
अंतर्लेखन inscribe
अंतर्वृत्त incircle
अंतस्त्रिज्या inradius
अंतिम final
अन्यथा aliter (otherwise)
अपवर्तक submultiple
अपवर्त्य multiple
अयुग्म odd
अर्हा value
अल्पिष्ठ least
अवनति-कोण angle of depression
अवयव element
अष्टकोण, अष्टभुज octagon
असमता inequality
आदि, आदिम initial
आदिम स्थिति initial position
आदि रेखा initial line
आदेश substitution
आधार base
आन्तर अर्धक internal bisector
आपातन subtend

आयत rectangle
आयाम length
आर (from अर), सचापार-कोण radian *n*
आरीय radian *adj*
आवर्त, आवर्तकाल period
आवर्तीय periodic
उच्छ्राय altitude
उत्क्रमकोटिज्या (उत्को) coversed sine
उत्क्रमज्या (उज्या) versed sine
उदग्र vertical
उन्नत raised
६ उन्नत ५ 6 raised to 5
उन्नति-कोण angle of elevation
उन्नयन raise
उपसन्न approximate (brought together)
उपसादित approximate
उपसाध्य corollary
उभय-साधारण common to both
ऋजुपूर कोण supplementary angle
ऋण negative
एकक unit
ऐकात्म identical
ऐकात्म्य identity
कर्ण hypotenuse
कला minute
काल्पनिक imaginary
काष्ठिका second
केन्द्र centre
कोटिज्या (कोज्या) cosine (cos)
कोटिस्पर्शज्या, कोटिस्पज्या (कोस्प) cotangent (cot)
कोणबिंदु angular points
कोण मापन measurement of angles
क्रोशक mile
क्षेत्रफल area
क्षितिज horizontal
खंड segment
गणन calculation
गतिहीन motionless, at rest
गुण properties
गुणनफल product
गुणोत्तर श्रेढी geometrical progression
गोल sphere
गोलीय छेद section of a sphere
ग्राह्य admissible
घटीवत् clockwise
घात power
६ घात ५ 6 raised to the power 5
घातांक index of the power
चक्रिक cyclic
चतुर्भुज quadrilateral
चरण quadrant
चर variable

चाप arc
छेद section
छेदा logarithm
ज्या sine (sin)
तदनुसार according as
त्रिकोणमिति trigonometry
त्रिकोणमितीय trigonometrical
दक्षिण पक्ष right hand side
दशच्छेदा-पद्धति, साधारण छेदा पद्धति common system of logarithms
दशभुज, दशकोण decagon
दशमिक decimal
दशमिकांश mantissa
दशा, प्रकार case
द्विघातन squaring
द्विघात समीकार quadratic equation
द्विसमत्रिभुज isosceles triangle
धन positive
ध्रुव pole
ध्रुववृत्त meridian
नति inclination
निदर्शनात्मक illustrative
निबंध restriction
नियम law
नियमित regular
निरूपण represent
निर्धारण solution (of a triangle)
निर्मेय problem
निष्पत्ति ratio
न्यास, पक्ष data
न्यून कोण acute angle
पक्ष side of an equation
पंचभुज, पंचकोण pentagon
पदसंहति expression
पदिक pedal
पद्धति system
परिकेंद्र circumcentre
परित्रिज्या circumradius
परिभाषा definition
परिभ्रमण revolution
परिभ्रमण रेखा revolving line
परिमाण size
परिमाप perimeter
परिमित finite
परिलेखन circumscribe
परिवर्तन convert
परिवृत्त circumcircle
पाद foot
पादांक suffix
पार्श्व side of a solid
पालन (प्रतिबंध) satisfy (a condition)
पूर्णांक integer
प्रचय common difference
प्रतिघटीवत् anticlockwise

प्रतिच्छेदा antilogarithm
प्रतिबंध condition
प्रतीक symbol
प्रतीप inverse
प्रनियम principle
प्रमाप standard
प्रमेय theorem
प्रवृत्ति tendency
प्राकृत natural
प्रांगुल inch
फल result, solution
बहिर्लिखित escribed
बहिर्लेखन escribe
बहिर्वृत्त excircle
बहिष्केंद्र excentre
बहिष्कोण exterior angle
बहिस्त्रिज्या exradius
बहुभुज polygon
बाह्य अर्धक external bisector
बाह्यतः externally
बिंदुरेख graph
बिंब disc
बीजगणित algebra
बैजिक रीति से algebraically
भागफल quotient
भाजन division
भिन्न fraction
भुजा side of a triangle
मध्यक mean
मध्यगा median
मर्यादा चाप bounding arc
मर्यादा रेखा bounding line
महत्ता magnitude
माप measure
मिथश्छेदन, छेदन intersect
मूल root
मूलबिंदु origin
मूलभूत fundamental
यथार्थ exact
यष्टि yard
योग sum, addition
योग प्रमेय addition theorem
राशि quantity
रैखिकी geometry
लक्षण characteristic
लंब perpendicular
लंबकेंद्र orthocentre
लंबकोण right angle
लंबपूर्क complementary
वक्र curve
वर्ग square (quantity)
वर्गमूल square root
वर्गयोग करण squaring and adding
वर्ग समीकार quadratic equation
वर्तुल circular
वर्तुल माप circular measure
वस्तु object

वाम पक्ष left hand side
वास्तविक real
विकर्ण diagonal
त्रिकोणमान theodolite
विचरण variation
वियुत minus
वियोग subtraction
विश्रामस्थ at rest
विषम odd
विस्तार expansion
वृत्त circle
वृत्त शकल sector of a circle
वृत्तीय cyclic
वैकल्पिक alternative
व्यक्त करना express
व्यंजक expression
व्यत्यासत conversely
व्यास diameter
व्युत्क्रम reciprocal
व्युत्क्रमकोटिज्या, व्युत्कोज्या
(व्युको) secant (sec)
व्युत्क्रमज्या (व्युज्या) co ecant
(cosec)
शकर sector
शतिक centesimal
शतिमान centimetre
शिरोदंड bar
शिरोबिंदु vertex
शून्य zero
श्रित function
श्रेढी progression
षड्भुज, षट्कोण hexagon
षष्ठक sextant
षाष्टिक sexagesimal
संलग्न adjacent
संवादी corresponding
सवृत्तीय concyclic
सस्पर्श बिन्दु point of contact
संकेतना notation
संख्यात्मक numerical
सचापार-कोण radian
संतत continuous
सत्यापन verification
सन्दिश त्रिज्या radius vector
संदिग्धता ambiguity
सम even
समतल plane
समत्रिभुज equilateral tri
angle
समरूप similar
समांग uniform (homogene
ous)
समाधान satisfy (an equa
tion)
समांतर parallel
समांतर श्रेढी arithmetic
progression
समायत square (figure)
समीकार equation
संपतन coincide

छेद्य-सारणी ( logarithmic tables )

| | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| १० | ०००० | ००४३ | ००८६ | ०१२८ | ०१७० | | | | | | ५ | ९ | १३ | १७ | २१ | २६ | ३० | ३४ | ३८ |
| | | | | | | ०२१२ | ०२५३ | ०२९४ | ०३३४ | ०३७४ | ४ | ८ | १२ | १६ | २० | २४ | २८ | ३२ | ३६ |
| ११ | ०४१४ | ०४५३ | ०४९२ | ०५३१ | ०५६९ | | | | | | ४ | ८ | १२ | १६ | २० | २३ | २७ | ३१ | ३५ |
| | | | | | | ०६०७ | ०६४५ | ०६८२ | ०७१९ | ०७५५ | ४ | ७ | ११ | १५ | १८ | २२ | २६ | २९ | ३३ |
| १२ | ०७९२ | ०८२८ | ०८६४ | ०८९९ | ०९३४ | | | | | | ३ | ७ | ११ | १४ | १८ | २१ | २५ | २८ | ३२ |
| | | | | | | ०९६९ | १००४ | १०३८ | १०७२ | ११०६ | ३ | ७ | १० | १४ | १७ | २० | २४ | २७ | ३१ |
| १३ | ११३९ | ११७३ | १२०६ | १२३९ | १२७१ | | | | | | ३ | ६ | १० | १३ | १६ | १९ | २३ | २६ | २९ |
| | | | | | | १३०३ | १३३५ | १३६७ | १३९९ | १४३० | ३ | ७ | १० | १३ | १६ | १९ | २२ | २५ | २९ |
| १४ | १४६१ | १४९२ | १५२३ | १५५३ | १५८४ | | | | | | ३ | ६ | ९ | १२ | १५ | १९ | २२ | २५ | २८ |
| | | | | | | १६१४ | १६४४ | १६७३ | १७०३ | १७३२ | ३ | ६ | ९ | १२ | १४ | १७ | २० | २३ | २६ |
| १५ | १७६१ | १७९० | १८१८ | १८४७ | १८७५ | | | | | | ३ | ६ | ९ | ११ | १४ | १७ | २० | २३ | २६ |
| | | | | | | १९०३ | १९३१ | १९५९ | १९८७ | २०१४ | ३ | ६ | ८ | ११ | १४ | १७ | १९ | २२ | २५ |
| १६ | २०४१ | २०६८ | २०९५ | २१२२ | २१४८ | | | | | | ३ | ६ | ८ | ११ | १४ | १६ | १९ | २२ | २४ |
| | | | | | | २१७५ | २२०१ | २२२७ | २२५३ | २२७९ | ३ | ५ | ८ | १० | १३ | १६ | १८ | २१ | २३ |
| १७ | २३०४ | २३३० | २३५५ | २३८० | २४०५ | | | | | | ३ | ५ | ८ | १० | १३ | १५ | १८ | २० | २३ |
| | | | | | | २४३० | २४५५ | २४८० | २५०४ | २५२९ | ३ | ५ | ८ | १० | १२ | १५ | १७ | २० | २२ |
| १८ | २५५३ | २५७७ | २६०१ | २६२५ | २६४८ | | | | | | २ | ५ | ७ | ९ | १२ | १४ | १७ | १९ | २१ |
| | | | | | | २६७२ | २६९५ | २७१८ | २७४२ | २७६५ | २ | ४ | ७ | ९ | ११ | १४ | १६ | १८ | २१ |
| १९ | २७८८ | २८१० | २८३३ | २८५६ | २८७८ | | | | | | २ | ४ | ७ | ९ | ११ | १३ | १६ | १८ | २० |
| | | | | | | २९०० | २९२३ | २९४५ | २९६७ | २९८९ | २ | ४ | ६ | ८ | ११ | १३ | १५ | १७ | १९ |
| २० | ३०१० | ३०३२ | ३०५४ | ३०७५ | ३०९६ | ३११८ | ३१३९ | ३१६० | ३१८१ | ३२०१ | २ | ४ | ६ | ८ | ११ | १३ | १५ | १७ | १९ |
| २१ | ३२२२ | ३२४३ | ३२६३ | ३२८४ | ३३०४ | ३३२४ | ३३४५ | ३३६५ | ३३८५ | ३४०४ | २ | ४ | ६ | ८ | १० | १२ | १४ | १६ | १८ |
| २२ | ३४२४ | ३४४४ | ३४६४ | ३४८३ | ३५०२ | ३५२२ | ३५४१ | ३५६० | ३५७९ | ३५९८ | २ | ४ | ६ | ८ | १० | १२ | १४ | १५ | १७ |
| २३ | ३६१७ | ३६३६ | ३६५५ | ३६७४ | ३६९२ | ३७११ | ३७२९ | ३७४७ | ३७६६ | ३७८४ | २ | ४ | ६ | ७ | ९ | ११ | १३ | १५ | १७ |
| २४ | ३८०२ | ३८२० | ३८३८ | ३८५६ | ३८७४ | ३८९२ | ३९०९ | ३९२७ | ३९४५ | ३९६२ | २ | ४ | ५ | ७ | ९ | ११ | १२ | १४ | |

छेद्य-सारणी ( logarithmic tables )

| | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| १० | ०००० | ००४३ | ००८६ | ०१२८ | ०१७० | | | | | | ५ ९ १३ | १७ २१ २६ | ३० ३४ ३८ |
| | | | | | | ०२१२ | ०२५३ | ०२९४ | ०३३४ | ०३७४ | ४ ८ १२ | १६ २० २४ | २८ ३२ ३६ |
| ११ | ०४१४ | ०४५३ | ०४९२ | ०५३१ | ०५६९ | | | | | | ४ ८ १२ | १६ २० २३ | २७ ३१ ३५ |
| | | | | | | ०६०७ | ०६४५ | ०६८२ | ०७१९ | ०७५५ | ४ ७ ११ | १५ १८ २२ | २६ २९ ३३ |
| १२ | ०७९२ | ०८२८ | ०८६४ | ०८९९ | ०९३४ | | | | | | ३ ७ ११ | १४ १८ २१ | २५ २८ ३२ |
| | | | | | | ०९६९ | १००४ | १०३८ | १०७२ | ११०६ | ३ ७ १० | १४ १७ २० | २४ २७ ३१ |
| १३ | ११३९ | ११७३ | १२०६ | १२३९ | १२७१ | | | | | | ३ ६ १० | १३ १६ १९ | २३ २६ २९ |
| | | | | | | १३०३ | १३३५ | १३६७ | १३९९ | १४३० | ३ ७ १० | १३ १६ १९ | २२ २५ २९ |
| १४ | १४६१ | १४९२ | १५२३ | १५५३ | १५८४ | | | | | | ३ ६ ९ | १२ १५ १९ | २२ २५ २८ |
| | | | | | | १६१४ | १६४४ | १६७३ | १७०३ | १७३२ | ३ ६ ९ | १२ १४ १७ | २० २३ २६ |
| १५ | १७६१ | १७९० | १८१८ | १८४७ | १८७५ | | | | | | ३ ६ ९ | ११ १४ १७ | २० २३ २६ |
| | | | | | | १९०३ | १९३१ | १९५९ | १९८७ | २०१४ | ३ ५ ८ | ११ १४ १६ | १९ २२ २५ |
| १६ | २०४१ | २०६८ | २०९५ | २१२२ | २१४८ | | | | | | ३ ६ ८ | ११ १४ १६ | १९ २२ २४ |
| | | | | | | २१७५ | २२०१ | २२२७ | २२५३ | २२७९ | ३ ५ ८ | १० १३ १६ | १८ २१ २३ |
| १७ | २३०४ | २३३० | २३५५ | २३८० | २४०५ | | | | | | ३ ५ ८ | १० १३ १५ | १८ २० २३ |
| | | | | | | २४३० | २४५५ | २४८० | २५०४ | २५२९ | ३ ५ ८ | १० १२ १५ | १७ २० २२ |
| १८ | २५५३ | २५७७ | २६०१ | २६२५ | २६४८ | | | | | | २ ५ ७ | ९ १२ १४ | १७ १९ २१ |
| | | | | | | २६७२ | २६९५ | २७१८ | २७४२ | २७६५ | २ ४ ७ | ९ ११ १४ | १६ १८ २१ |
| १९ | २७८८ | २८१० | २८३३ | २८५६ | २८७८ | | | | | | २ ४ ७ | ९ ११ १३ | १६ १८ २० |
| | | | | | | २९०० | २९२३ | २९४५ | २९६७ | २९८९ | २ ४ ६ | ८ ११ १३ | १५ १७ १९ |
| २० | ३०१० | ३०३२ | ३०५४ | ३०७५ | ३०९६ | ३११८ | ३१३९ | ३१६० | ३१८१ | ३२०१ | २ ४ ६ | ८ ११ १३ | १५ १७ १९ |
| २१ | ३२२२ | ३२४३ | ३२६३ | ३२८४ | ३३०४ | ३३२४ | ३३४५ | ३३६५ | ३३८५ | ३४०४ | २ ४ ६ | ८ १० १२ | १४ १६ १८ |
| २२ | ३४२४ | ३४४४ | ३४६४ | ३४८३ | ३५०२ | ३५२२ | ३५४१ | ३५६० | ३५७९ | ३५९८ | २ ४ ६ | ८ १० १२ | १४ १५ १७ |
| २३ | ३६१७ | ३६३६ | ३६५५ | ३६७४ | ३६९२ | ३७११ | ३७२९ | ३७४७ | ३७६६ | ३७८४ | २ ४ ६ | ७ ९ ११ | १३ १५ १७ |
| २४ | ३८०२ | ३८२० | ३८३८ | ३८५६ | ३८७४ | ३८९२ | ३९०९ | ३९२७ | ३९४५ | ३९६२ | २ ४ ५ | ७ ९ ११ | १२ १४ |

| ० | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| २५ | ३९७९ | ३९९७ | ४०१४ | ४०३१ | ४०४८ | ४०६५ | ४०८२ | ४०९९ | ४११६ | ४१३३ | २ ३ ५ | ७ ९ १० | १२ १४ १५ |
| २६ | ४१५० | ४१६६ | ४१८३ | ४२०० | ४२१६ | ४२३२ | ४२४९ | ४२६५ | ४२८१ | ४२९८ | २ ३ ५ | ७ ८ १० | ११ १३ १५ |
| २७ | ४३१४ | ४३३० | ४३४६ | ४३६२ | ४३७८ | ४३९३ | ४४०९ | ४४२५ | ४४४० | ४४५६ | २ ३ ५ | ६ ८ ९ | ११ १३ १४ |
| २८ | ४४७२ | ४४८७ | ४५०२ | ४५१८ | ४५३३ | ४५४८ | ४५६४ | ४५७९ | ४५९४ | ४६०९ | २ ३ ५ | ६ ८ ९ | ११ १२ १४ |
| २९ | ४६२४ | ४६३९ | ४६५४ | ४६६९ | ४६८३ | ४६९८ | ४७१३ | ४७२८ | ४७४२ | ४७५७ | १ ३ ४ | ६ ७ ९ | १० १२ १३ |
| ३० | ४७७१ | ४७८६ | ४८०० | ४८१४ | ४८२९ | ४८४३ | ४८५७ | ४८७१ | ४८८६ | ४९०० | १ ३ ४ | ६ ७ ९ | १० ११ १३ |
| ३१ | ४९१४ | ४९२८ | ४९४२ | ४९५५ | ४९६९ | ४९८३ | ४९९७ | ५०११ | ५०२४ | ५०३८ | १ ३ ४ | ६ ७ ८ | १० ११ १२ |
| ३२ | ५०५१ | ५०६५ | ५०७९ | ५०९२ | ५१०५ | ५११९ | ५१३२ | ५१४५ | ५१५९ | ५१७२ | १ ३ ४ | ५ ७ ८ | ९ ११ १२ |
| ३३ | ५१८५ | ५१९८ | ५२११ | ५२२४ | ५२३७ | ५२५० | ५२६३ | ५२७६ | ५२८९ | ५३०२ | १ ३ ४ | ५ ६ ८ | ९ १० १२ |
| ३४ | ५३१५ | ५३२८ | ५३४० | ५३५३ | ५३६६ | ५३७८ | ५३९१ | ५४०३ | ५४१६ | ५४२८ | १ ३ ४ | ५ ६ ८ | ९ १० ११ |
| ३५ | ५४४१ | ५४५३ | ५४६५ | ५४७८ | ५४९० | ५५०२ | ५५१४ | ५५२७ | ५५३९ | ५५५१ | १ २ ४ | ५ ६ ७ | ९ १० ११ |
| ३६ | ५५६३ | ५५७५ | ५५८७ | ५५९९ | ५६११ | ५६२३ | ५६३५ | ५६४७ | ५६५८ | ५६७० | १ २ ४ | ५ ६ ७ | ८ १० ११ |
| ३७ | ५६८२ | ५६९४ | ५७०५ | ५७१७ | ५७२९ | ५७४० | ५७५२ | ५७६३ | ५७७५ | ५७८६ | १ २ ३ | ५ ६ ७ | ८ ९ १० |
| ३८ | ५७९८ | ५८०९ | ५८२१ | ५८३२ | ५८४३ | ५८५५ | ५८६६ | ५८७७ | ५८८८ | ५८९९ | १ २ ३ | ५ ६ ७ | ८ ९ १० |
| ३९ | ५९११ | ५९२२ | ५९३३ | ५९४४ | ५९५५ | ५९६६ | ५९७७ | ५९८८ | ५९९९ | ६०१० | १ २ ३ | ४ ५ ७ | ८ ९ १० |
| ४० | ६०२१ | ६०३१ | ६०४२ | ६०५३ | ६०६४ | ६०७५ | ६०८५ | ६०९६ | ६१०७ | ६११७ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ८ ९ १० |
| ४१ | ६१२८ | ६१३८ | ६१४९ | ६१६० | ६१७० | ६१८० | ६१९१ | ६२०१ | ६२१२ | ६२२२ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
| ४२ | ६२३२ | ६२४३ | ६२५३ | ६२६३ | ६२७४ | ६२८४ | ६२९४ | ६३०४ | ६३१४ | ६३२५ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
| ४३ | ६३३५ | ६३४५ | ६३५५ | ६३६५ | ६३७५ | ६३८५ | ६३९५ | ६४०५ | ६४१५ | ६४२५ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
| ४४ | ६४३५ | ६४४४ | ६४५४ | ६४६४ | ६४७४ | ६४८४ | ६४९३ | ६५०३ | ६५१३ | ६५२२ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
| ४५ | ६५३२ | ६५४२ | ६५५१ | ६५६१ | ६५७१ | ६५८० | ६५९० | ६५९९ | ६६०९ | ६६१८ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
| ४६ | ६६२८ | ६६३७ | ६६४६ | ६६५६ | ६६६५ | ६६७५ | ६६८४ | ६६९३ | ६७०२ | ६७१२ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ७ ८ |
| ४७ | ६७२१ | ६७३० | ६७३९ | ६७४९ | ६७५८ | ६७६७ | ६७७६ | ६७८५ | ६७९४ | ६८०३ | १ २ ३ | ४ ५ ५ | ६ ७ ८ |
| ४८ | ६८१२ | ६८२१ | ६८३० | ६८३९ | ६८४८ | ६८५७ | ६८६६ | ६८७५ | ६८८४ | ६८९३ | १ २ ३ | ४ ४ ५ | ६ ७ ८ |
| ४९ | ६९०२ | ६९११ | ६९२० | ६९२८ | ६९३७ | ६९४६ | ६९५५ | ६९६४ | ६९७२ | ६९८१ | १ २ ३ | ४ ४ ५ | ६ ७ ८ |

## प्रतिच्छेद्या-सारणी (antilogarithmic tables)

| | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·०० | १००० | १००२ | १००५ | १००७ | १००९ | १०१२ | १०१४ | १०१६ | १०१९ | १०२१ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०१ | १०२३ | १०२६ | १०२८ | १०३० | १०३३ | १०३५ | १०३८ | १०४० | १०४२ | १०४५ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०२ | १०४७ | १०५० | १०५२ | १०५४ | १०५७ | १०५९ | १०६२ | १०६४ | १०६७ | १०६९ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०३ | १०७२ | १०७४ | १०७६ | १०७९ | १०८१ | १०८४ | १०८६ | १०८९ | १०९१ | १०९४ | ० ० १ | १ १ १ | २ २ २ |
| ·०४ | १०९६ | १०९९ | ११०२ | ११०४ | ११०७ | ११०९ | १११२ | १११४ | १११७ | १११९ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०५ | ११२२ | ११२५ | ११२७ | ११३० | ११३२ | ११३५ | ११३८ | ११४० | ११४३ | ११४६ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०६ | ११४८ | ११५१ | ११५३ | ११५६ | ११५९ | ११६१ | ११६४ | ११६७ | ११६९ | ११७२ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०७ | ११७५ | ११७८ | ११८० | ११८३ | ११८६ | ११८९ | ११९१ | ११९४ | ११९७ | ११९९ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ २ |
| ·०८ | १२०२ | १२०५ | १२०८ | १२११ | १२१३ | १२१६ | १२१९ | १२२२ | १२२५ | १२२७ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·०९ | १२३० | १२३३ | १२३६ | १२३९ | १२४२ | १२४५ | १२४७ | १२५० | १२५३ | १२५६ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·१० | १२५९ | १२६२ | १२६५ | १२६८ | १२७१ | १२७४ | १२७६ | १२७९ | १२८२ | १२८५ | ० १ १ | १ १ २ | २ २ ३ |
| ·११ | १२८८ | १२९१ | १२९४ | १२९७ | १३०० | १३०३ | १३०६ | १३०९ | १३१२ | १३१५ | ० १ १ | १ २ २ | २ २ ३ |
| ·१२ | १३१८ | १३२१ | १३२४ | १३२७ | १३३० | १३३४ | १३३७ | १३४० | १३४३ | १३४६ | ० १ १ | १ २ २ | २ २ ३ |
| ·१३ | १३४९ | १३५२ | १३५५ | १३५८ | १३६१ | १३६५ | १३६८ | १३७१ | १३७४ | १३७७ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१४ | १३८० | १३८४ | १३८७ | १३९० | १३९३ | १३९६ | १४०० | १४०३ | १४०६ | १४०९ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१५ | १४१३ | १४१६ | १४१९ | १४२२ | १४२६ | १४२९ | १४३२ | १४३५ | १४३९ | १४४२ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१६ | १४४५ | १४४९ | १४५२ | १४५५ | १४५९ | १४६२ | १४६६ | १४६९ | १४७२ | १४७६ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१७ | १४७९ | १४८३ | १४८६ | १४८९ | १४९३ | १४९६ | १५०० | १५०३ | १५०७ | १५१० | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१८ | १५१४ | १५१७ | १५२१ | १५२४ | १५२८ | १५३१ | १५३५ | १५३८ | १५४२ | १५४५ | ० १ १ | १ २ २ | २ ३ ३ |
| ·१९ | १५४९ | १५५२ | १५५६ | १५६० | १५६३ | १५६७ | १५७० | १५७४ | १५७८ | १५८१ | ० १ १ | १ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२० | १५८५ | १५८९ | १५९२ | १५९६ | १६०० | १६०३ | १६०७ | १६११ | १६१४ | १६१८ | ० १ १ | १ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२१ | १६२२ | १६२६ | १६२९ | १६३३ | १६३७ | १६४१ | १६४४ | १६४८ | १६५२ | १६५६ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२२ | १६६० | १६६३ | १६६७ | १६७१ | १६७५ | १६७९ | १६८३ | १६८७ | १६९० | १६९४ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ३ |
| ·२३ | १६९८ | १७०२ | १७०६ | १७१० | १७१४ | १७१८ | १७२२ | १७२६ | १७३० | १७३४ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ४ |
| ·२४ | १७३८ | १७४२ | १७४६ | १७५० | १७५४ | १७५८ | १७६२ | १७६६ | १७७० | १७७४ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ४ |

| | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ | १ २ ३ | ४ ५ ६ | ७ ८ ९ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| •२५ | १७७८ | १७८२ | १७८६ | १७९१ | १७९५ | १७९९ | १८०३ | १८०७ | १८११ | १८१६ | ० १ १ | २ २ २ | ३ ३ ४ |
| •२६ | १८२० | १८२४ | १८२८ | १८३२ | १८३७ | १८४१ | १८४५ | १८४९ | १८५४ | १८५८ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ३ ४ |
| •२७ | १८६२ | १८६६ | १८७१ | १८७५ | १८७९ | १८८४ | १८८८ | १८९२ | १८९७ | १९०१ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ३ ४ |
| •२८ | १९०५ | १९१० | १९१४ | १९१९ | १९२३ | १९२८ | १९३२ | १९३६ | १९४१ | १९४५ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| •२९ | १९५० | १९५४ | १९५९ | १९६३ | १९६८ | १९७२ | १९७७ | १९८२ | १९८६ | १९९१ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| •३० | १९९५ | २००० | २००४ | २००९ | २०१४ | २०१८ | २०२३ | २०२८ | २०३२ | २०३७ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| •३१ | २०४२ | २०४६ | २०५१ | २०५६ | २०६१ | २०६५ | २०७० | २०७५ | २०८० | २०८४ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| •३२ | २०८९ | २०९४ | २०९९ | २१०४ | २१०९ | २११३ | २११८ | २१२३ | २१२८ | २१३३ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| •३३ | २१३८ | २१४३ | २१४८ | २१५३ | २१५८ | २१६३ | २१६८ | २१७३ | २१७८ | २१८३ | ० १ १ | २ २ ३ | ३ ४ ४ |
| •३४ | २१८८ | २१९३ | २१९८ | २२०३ | २२०८ | २२१३ | २२१८ | २२२३ | २२२८ | २२३४ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| •३५ | २२३९ | २२४४ | २२४९ | २२५४ | २२५९ | २२६५ | २२७० | २२७५ | २२८० | २२८६ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| •३६ | २२९१ | २२९६ | २३०१ | २३०७ | २३१२ | २३१७ | २३२३ | २३२८ | २३३३ | २३३९ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| •३७ | २३४४ | २३५० | २३५५ | २३६० | २३६६ | २३७१ | २३७७ | २३८२ | २३८८ | २३९३ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| •३८ | २३९९ | २४०४ | २४१० | २४१५ | २४२१ | २४२७ | २४३२ | २४३८ | २४४३ | २४४९ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ४ ५ |
| •३९ | २४५५ | २४६० | २४६६ | २४७२ | २४७७ | २४८३ | २४८९ | २४९५ | २५०० | २५०६ | १ १ २ | २ ३ ३ | ४ ५ ५ |
| •४० | २५१२ | २५१८ | २५२३ | २५२९ | २५३५ | २५४१ | २५४७ | २५५३ | २५५९ | २५६४ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |
| •४१ | २५७० | २५७६ | २५८२ | २५८८ | २५९४ | २६०० | २६०६ | २६१२ | २६१८ | २६२४ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ५ |
| •४२ | २६३० | २६३६ | २६४२ | २६४९ | २६५५ | २६६१ | २६६७ | २६७३ | २६७९ | २६८५ | १ १ २ | २ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| •४३ | २६९२ | २६९८ | २७०४ | २७१० | २७१६ | २७२३ | २७२९ | २७३५ | २७४२ | २७४८ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| •४४ | २७५४ | २७६१ | २७६७ | २७७३ | २७८० | २७८६ | २७९३ | २७९९ | २८०५ | २८१२ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ४ ५ ६ |
| •४५ | २८१८ | २८२५ | २८३१ | २८३८ | २८४४ | २८५१ | २८५८ | २८६४ | २८७१ | २८७७ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| •४६ | २८८४ | २८९१ | २८९७ | २९०४ | २९११ | २९१७ | २९२४ | २९३१ | २९३८ | २९४४ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| •४७ | २९५१ | २९५८ | २९६५ | २९७२ | २९७९ | २९८५ | २९९२ | २९९९ | ३००६ | ३०१३ | १ १ २ | ३ ३ ४ | ५ ५ ६ |
| •४८ | ३०२० | ३०२७ | ३०३४ | ३०४१ | ३०४८ | ३०५५ | ३०६२ | ३०६९ | ३०७६ | ३०८३ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ६ |
| •४९ | ३०९० | ३०९७ | ३१०५ | ३११२ | ३११९ | ३१२६ | ३१३३ | ३१४१ | ३१४८ | ३१५५ | १ १ २ | ३ ४ ४ | ५ ६ ६ |

# शुद्धिपत्र

| पृष्ठ | पंक्ति | अशुद्ध | शुद्ध |
|---|---|---|---|
| ५ | २ | $स्प\,३६° = \frac{\sqrt{५}-१}{\sqrt{५}+१}$ | $स्प\,३६° = \frac{\sqrt{१० - २\sqrt{५}}}{\sqrt{५}+१}$ |
| ५ | ४ | ज्या (−अ) = ज्या अ | ज्या (−अ) = −ज्या अ |
| ९ | ९ | [अशुद्ध] $= सा\,स्प\frac{क}{२}\;४त्रा\,ज्या\frac{क}{२}\,कोज्या\frac{ख}{२}\,कोज्या\frac{ग}{२}$ | [शुद्ध] $= सा\,स्प\frac{क}{२} = ४त्रा\,ज्या\frac{क}{२}\,कोज्या\frac{ख}{२}\,कोज्या\frac{ग}{२}$ |
| १४ | १९ | $१^{अ}$ | $१^{आ}$ |
| २६ | १५ | $स्प\,अ = \frac{मय}{मभ}$ | $स्प\,अ = \frac{भय}{मभ}$ |
| २७ | ६ | $\frac{मभ}{मय}$ | $\frac{मभ}{भय}$ |
| ३० | १९ | $\frac{भव'\,मव}{मभ'\,मव}$ | $\frac{भव/मव}{मभ/मव}$ |
| ६७ | ५ | और व कोस्प अ | और कोस्प अ |

११० दसवीं पंक्ति के पश्चात् यह वाक्य पढ़िए— इसलिए सामान्य पदसंहति २ सप्या $\pm \frac{५\,प्या}{६}$ है।

| पृष्ठ | पंक्ति | अशुद्ध | शुद्ध |
| --- | --- | --- | --- |
| ११३ | १२ | ±२ | ∓२ |
| ११३ | १० | सिद्ध करो | साधन करो |
| ११५ | ३ | सिद्ध करो | साधन करो |
| १५१ | ५ | =कोज्या$^{२}$ २ क | =कोज्या$^{३}$ २ क |
| १५२ | ११ | $\frac{१}{व्युत्कोज्या, \frac{क}{२}}$ | $\frac{१}{व्युत्कोज्या^{१} \frac{क}{२}}$ |
| १८७ | १३ | $-$का. खा कोज्या ग | $-$२ का खा. कोज्या ग |
| २३५ | १२ | $+$ ोज्या (ग $-$ ख)}] | $+$कोज्या (ग $-$ ख)}] |
| २५६ | १९ | $(क^{य})^{र} = क^{य-र}$ | $(क^{य})^{र} = क^{यर}$ |
| २६२ | २० | १ होता है | $\bar{१}$ होता है |
| २६८ | १७ | अहाँ स्थूल से | अहाँ स्थूल रूप से |